یادآوری:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

شرط کامل بودن: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$K(Z) = \frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y}$$

$$\mu(Z) = e^{\int K(Z)\,dZ}$$

مثال: برای معادله $(4x^7 - 12x^3y - 8x^3)dx + (3x^4 - y)dy = 0$ یک عامل انتگرال که تابعی از $x^4 + y$ باشد بیابید:

$Z = x^4 + y \qquad \dfrac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y}$

$M_y = -12x^3 \qquad N_x = 12x^3 \qquad Z_x = 4x^3 \qquad Z_y = 1$

$$\frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y} = \frac{-24x^3}{4x^3(3x^4 - y) - (4x^7 - 12x^3y - 8x^3)} = \frac{-24x^3}{8x^7 + 8x^3y + 8x^3}$$

$$= \frac{-24x^3}{8x^3(x^4 + y + 1)} = \frac{-3}{x^4 + y + 1} = \frac{-3}{Z+1}$$

$$\mu(Z) = e^{\int K(Z)\,dZ} = e^{\int \frac{-3}{Z+1}\,dZ} = e^{-3\ln(Z+1)} = \frac{1}{(Z+1)^3}$$

نکته: چنانچه معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ یک معادله دیفرانسیل همگن باشد، در اینصورت عامل انتگرالی به فرم

$$\mu(x,y)=\frac{1}{Mx+Ny}$$

دارد.

مثال: معادله $(2x^2y+y^3)\,dx+(xy^2-2x^3)\,dy=0$، یک معادله همگن است. بنابراین

$$\mu(x,y)=\frac{1}{Mx+Ny}$$

$$=\frac{1}{2x^3y+xy^3+xy^3-2x^3y}=\frac{1}{2xy^3}$$

$$\frac{2x^2y+y^3}{2xy^3}\,dx+\frac{xy^2-2x^3}{2xy^3}\,dy=0$$

$$\Phi(x,y)=\int\frac{2x^2y+y^3}{2xy^3}\,dx=\int\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{2}\ln(x)+g(y)$$

$$\Phi(x,y)=\int\frac{xy^2-2x^3}{2xy^3}\,dy=\int\left(\frac{1}{2y}-\frac{x^2}{y^3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln(y)+\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{y^2}+h(x)$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y)=\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{y^2}+\frac{1}{2}\left(\ln(x)+\ln(y)\right)=C$$

نکته: عامل انتگرال معادله به فرم $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ به صورت

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xy(f(xy)-g(xy))}$$

است.

مثال: جواب عمومی معادله $(y-xy^2)dx-(x+x^2y)dy=0$ را بیابید.

$$y(1\underbrace{-xy}_{f})dx+x(\underbrace{-1-xy}_{g})dy=0$$

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xy(1-xy+1+xy)}=\frac{1}{2xy}$$

$$\frac{y-xy^2}{2xy}dx-\frac{(x+x^2y)}{2xy}dy=0$$

$$\phi(x,y)=\int\frac{y-xy^2}{2xy}dx=\int\left(\frac{1}{2x}-\frac{y}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{y}{2}x+g(y)$$

$$N=\frac{\partial\phi}{\partial y}\Rightarrow -\frac{x+x^2y}{2xy}=-\frac{1}{2}x+g'(y)$$

$$-\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}x=g'(y)-\frac{1}{2}x\Rightarrow g(y)=\int-\frac{1}{2}y\,dy$$

$$=\frac{-y^2}{4}+c$$

$$\Rightarrow\phi(x,y)=c\Rightarrow\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{y}{2}x-\frac{y^2}{4}=c$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول بصورت

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

است . برای حل این معادله به یک عامل انتگرال، ابتدا (1) را بصورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow (p(x)y - q(x))dx + dy = 0 \qquad (2)$$

همانطور که دیده می شود معادله فوق کامل نیست ولی

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{p(x)}{1} = p(x)$$

بنابراین معادله فوق عامل انتگرال از x دارد که برابر است با

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

با ضرب این عامل انتگرال و حل مسأله فوق به جواب

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\mu(x)dx + c\right]$$

می رسیم .

تذکر :
ممکن است معادله نسبت به y و y' خطی نباشد ولی نسبت به x و x' خطی باشد در اینصورت جواب معادله بصورت زیر است :

$$x = \frac{1}{\mu(y)}\left[\int q(y)\mu(y)dy + c\right]$$

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $y' + y\tan(x) = \sin(2x)$

$$\mu(x) = e^{\int \tan(x)} = e^{-\ln(\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\,\mu(x)\,dx + c\right]$$

$$= \cos(x)\left[\int \frac{\sin 2x}{\cos(x)}\,dx + c\right]$$

$$= \cos(x)\,(-2\cos(x) + c)$$

۲) $y' + y\cot(x) = 5e^{\cos(x)}$

$$\mu(x) = e^{\int \cot(x)\,dx} = e^{\ln(\sin(x))} = \sin(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)}\left(\int 5e^{\cos(x)}\sin(x)\,dx + c\right)$$

$$= \frac{1}{\sin(x)}\left(-5e^{\cos(x)} + c\right)$$

3) $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1}(y) - x)\,dy$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1}(y) - x}{1+y^2} \Rightarrow x' = \frac{\tan^{-1}(y)}{1+y^2} - \frac{x}{1-y^2}$$

$$x' + \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{p(x)} = \underbrace{\frac{\tan^{-1}(y)}{1+y^2}}_{q(x)} \qquad \mu(y) = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}(y)}$$

$$x = \frac{1}{e^{\tan^{-1}(y)}} \left(\int e^{\tan^{-1}(y)} \frac{\tan^{-1}(y)}{1+y^2}\, dy + c \right)$$

$$x = e^{-\tan^{-1}(y)} \left(e^{\tan^{-1}(y)} \tan^{-1}(y) - \int \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}\, dy + c \right)$$

$$= e^{-\tan^{-1}(y)} \left(\tan^{-1}(y) e^{\tan^{-1}(y)} - e^{\tan^{-1}(y)} + c \right)$$

$$x = \tan^{-1}(y) - 1 + C e^{\tan^{-1}(y)}$$

4) $$y' = \frac{y}{2y\ln(y) + y - x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y\ln(y) + y - x}{y} \Rightarrow x' = 2\ln(y) + 1 - \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow x' + \frac{x}{y} = \ln(y^2) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln(y)} = y$$

$$x = \frac{1}{y}\left(\int \ln(y^2)\, y\, dy + c \right) = \frac{1}{y}\left(2 \underbrace{\int \ln(y) y\, dy}_{**} + c \right)$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{y}\left(y^2 \ln(y) - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{c}{y}} = y\ln(y) - \frac{y}{2} + \frac{c}{y}$$

$$** \int \ln(y) y\, dy = \frac{y^2}{2}\ln(y) - \int \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{2}\ln(y) - \frac{y^2}{4}$$

	u	dv
$+$	$\ln(y)$	y
$-$	$\frac{1}{y}$	$\frac{y^2}{2}$

معادلات قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه اول:

معادلات برنولی:

فرم کلی این معادلات بصورت زیر می باشد:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad n \neq 0,1$$

برای حل این معادلات، ابتدا طرفین را به y^n تقسیم می کنیم:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

با درنظر گرفتن تغییر متغیر $\boxed{u = y^{1-n}}$ داریم:

$$u' = (1-n)y^{-n}y'$$

پس:

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x) \quad \text{یا} \quad u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی است.

مثال: $xy' - y = \frac{3}{2}xy^3$

یک معادله برنولی از درجه $n=3$ است. با تقسیم طرفین بر y^3 داریم:

$$xy'y^{-3} - y^{-2} = \frac{3}{2}x \Rightarrow y'y^{-3} - \frac{1}{x}y^{-2} = \frac{3}{2}$$

با $u = y^{1-3} = y^{-2}$ داریم:

$$u' + \frac{2}{x}u = -3 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

$$u = \frac{1}{x^2}\left[\int -3x^2dx + c\right] = \frac{-x^3 + c}{x^2}$$

$$\Rightarrow y^{-2} = \frac{-x^3 + c}{x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{c - x^3}$$

مثال:

$$x' = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(y+1)x^{-2}$$

$$x' - \frac{x}{3} = \frac{1}{3}(y+1)x^{-2}$$

با تقسیم طرفین بر x^{-2} داریم:

$$x^2 x' - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(y+1)$$

با $u = x^3$، داریم:

$$\frac{u'}{3} - \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}(y+1) \Rightarrow u' - u = y+1$$

$$\mu(y) = e^{-y} \Rightarrow u = e^{y}\left(\int e^{-y}(y+1)dy + c\right.$$

$$\Rightarrow \int e^{-y}(y+1)\,dy = -(y+1+1)e^{-y} = -(y+2)e^{-y}$$

	u	dv
+	$y+1$	e^{-y}
−	1	$-e^{-y}$
+	0	e^{-y}

$$\Rightarrow x^3 = e^{y}\left(-(y+2)e^{-y} + c\right)$$

$$x^3 = -(y+2) + ce^{y}$$

مثال:

$$y'\sin(y) = \left(2\cos(y) - \sin^2(x)\right)\cos(x)$$

$$y'\sin(y) - 2\cos(y)\cos(x) = -\sin^2(x)\cos(x)$$

$$u = -\cos(y) \Rightarrow u' = y'\sin(y)$$

$$u' + 2\cos(x)\,u = -\sin^2(x)\cos(x) \qquad \mu(x) = e^{\int 2\cos x\,dx} = e^{2\sin(x)}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{e^{2\sin(x)}}\left(-\int e^{2\sin(x)}\sin^2(x)\cos(x)\,dx + c\right) = \cdots$$

برای حل انتگرال در بالا کافیست $2\sin(x)$ را t در نظر گرفته شود. در این صورت به انتگرال

$$\frac{1}{8}\int e^{t}t^2\,dt = \frac{1}{8}(t^2 - 2t + 2)e^{t}$$

می‌رسیم و داریم

	u	dv
+	t^2	e^t
−	$2t$	e^t
+	2	e^t
−	0	e^t

معادله دیفرانسیل برنولی تعمیم یافته:

معادله دیفرانسیل به فرم

$$y' g'(y) + p(x)\, g(y) = q(x) \qquad (1)$$

را معادله دیفرانسیل برنولی تعمیم یافته می نامند، برای حل این معادله از تغییر متغیر $u=g(y)$ کمک می گیریم و معادله فوق را به معادله دیفرانسیل خطی کاهش می دهیم.

$$u = g(y) \quad , \quad u' = y'\, g'(y)$$

لذا معادله (1) به فرم روبرو تبدیل می شود: $\Rightarrow u' + p(x)\, u = q(x)$

که یک معادله دیفرانسیل خطی است و بنابراین:

$$u = g(y) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int q(x)\, \mu(x)\, dx + c \right] \qquad \mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

که در آن μ برابر با مقدار بالا است.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' \sin(y) = (2\cos(y) - \sin^2(x)) \cos(x)$$

حل: $y' \sin(y) - 2\cos(x)\cos(y) = -\sin^2(x)\cos(x)$

$$u = -\cos(y) \Rightarrow u' = -y' \sin(y)$$

$$u' + \underbrace{2\cos(x) u}_{p(x)} = \underbrace{-\sin^2(x)\cos(x)}_{q(x)} \qquad \mu(x) = e^{\int 2\cos(x) dx} = e^{2\sin(x)}$$

$$u = \cos(y) = \frac{1}{e^{2\sin(x)}} \left[\int \sin^2(x)\cos(x)\, e^{2\sin(x)} dx + c \right]$$

$$= e^{-2\sin(x)} \left[\underbrace{\int \sin^2(x)\cos(x)\, e^{2\sin(x)} dx + c}_{\star} \right]$$

$$= e^{-2\sin(x)} \left[\left(\frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4}\right) e^{2\sin(x)} + c \right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4} + c\, e^{-2\sin(x)}$$

که در آن جواب مثبت (*) بصورت زیر بدست می‌آید

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\, e^{2\sin(x)}\, dx \qquad \begin{bmatrix} \theta = 2\sin(x) \\ d\theta = 2\cos(\theta)\, d\theta \end{bmatrix}$$

$$= \int \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 e^{\theta} \left(\frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \theta^2 e^{\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[(\theta^2 - 2\theta + 2)e^{\theta} + c\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(4\sin^2 x - 4\sin x + 2)\, e^{2\sin(x)} + c\right]$$

	u	dv
+	θ^2	e^{θ}
−	2θ	e^{θ}
+	2	e^{θ}
−	0	e^{θ}

معادله دیفرانسیل ریکاتی :

هر معادله دیفرانسیل به فرم کلی

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^2 + r(x) \qquad (۲)$$

را یک معادله دیفرانسیل ریکاتی می‌نامند. با داشتن یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ریکاتی که داده می‌شود و یا حدس زده می‌شود، می‌توان جواب عمومی این معادله را استخراج کرد. برای بدست آوردن جواب عمومی این معادله با داشتن جواب y_1، از تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ استفاده می‌کنیم و درنهایت به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$u' + (2y_1\, q(x) - p(x))\, u = -q(x)$$

می‌رسیم.

تذکر:

گاهی برای بدست آوردن جواب عمومی از تغییر متغیر $y = y_1 + u$ استفاده می‌کنند که در نهایت به معادله دیفرانسیل برنولی زیر می‌رسد:

$$u' + (p(x) - 2y_1\, q(x))\, u = q(x)\, u^2$$

ولی چون خود این معادله باید دوباره با کمک تغییر متغیر به معادله خطی مرتبه اول تبدیل شود، این تغییر متغیر توصیه نمی‌شود.

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

① $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad , \quad y_1 = x$

$$y' + \underbrace{2x}_{p(x)}\, y = y^2 + \underbrace{1 + x^2}_{r(x)} \qquad \left[y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u}\right] \quad \left[y' = 1 - \frac{u'}{u^2}\right]$$

$$1-\frac{u'}{u^2} = 1+x^2-2x\left(x+\frac{1}{u}\right)+\left(x+\frac{1}{u}\right)^2$$

با ضرب طرفین در u^2 داریم:

$$u^2-u' = (1+x^2)u^2-2x^2u^2+2xu+x^2u^2+2xu+1$$

$$u^2-u' = u^2+x^2u^2-2x^2u^2-2xu+x^2u^2+2xu+1$$

$$u'=-1 \Rightarrow u=-x+c \Rightarrow y=x+\frac{1}{-x+c}=x+\frac{1}{c-x}$$

② $x(x^2-1)y'+x^2-(x^2-1)y-y^2=0 \quad , y_1=x^2$

$$y=y_1+\frac{1}{u}=x^2+\frac{1}{u} \Rightarrow y'=2x-\frac{u'}{u^2}$$

$$y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2-1)}y^2-\frac{x}{x^2-1}$$

$$2x-\frac{u'}{u^2}-\frac{1}{x}\left(x^2+\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{x(x^2-1)}\left(x^2+\frac{1}{u}\right)^2-\frac{x}{x^2-1}$$

$$2xu^2-u'-xu^2-\frac{u}{x}=\frac{1}{x(x^2-1)}(x^4u^2+2x^2u+1)-\frac{x}{x^2-1}u^2$$

$$-u'+\left(x+\frac{x}{x^2-1}-\frac{x^3}{x^2-1}\right)u^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}\right)u=\frac{1}{x(x^2-1)}$$

$$-u'-\left(\frac{(x^2-1+2x^2)}{x(x^2-1)}\right)u=\frac{1}{x(x^2-1)}$$

$$u'+\left(\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}\right)u=-\frac{1}{x(x^2-1)}$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{3x^2-1}{x^3-x}dx}=e^{\ln(x^3-x)}=x^3-x$$

$$u=\frac{1}{x^3-x}\left(\int-\frac{1}{x(x^2-1)}(x^3-x)dx+c\right)=\frac{1}{x^3-x}(-x+c)=\frac{c-x}{x^3-x}$$

$$\Rightarrow y=x^2+\frac{x^3-x}{c-x}$$

③ $y'+(2x-1)y-y^2=x^2-x+1\ ,\qquad y_1=x$

$$y=x+\frac{1}{u}\Rightarrow\quad y'=1-\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(1-\frac{u'}{u^2}\right)+(2x-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{u}\right)^2=x^2-x+1$$

$$u^2-u'+(2x^2-x)u^2+(2x-1)u-(x^2u^2+2xu+1)=(x^2-x+1)u^2$$

$$-u'+(1+2x^2-x-x^2-x^2+x-1)u^2-u=1\quad\Rightarrow\quad u'+u=-1$$

$$\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{e^x}\left(-\int e^x dx+c\right)=e^{-x}(-e^x+c)=ce^{-x}-1$$

$$\Rightarrow y=x+\frac{1}{u}=x+\frac{1}{ce^{-x}-1}$$

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به فرم کلی

$$f(x,y,y')=0$$

حالت اول: اگر معادله $F(x,y,y')$ برحسب y' به صورت زیر قابل حل باشد:

$$(y'-g_1(x,y))\times(y'-g_2(x,y))\times\cdots\times(y'-g_n(x,y))=0$$

در این حالت ابتدا جواب تک تک معادله‌های به فرم $y'=g_i(x,y)$ ، $1\le i\le n$ را بدست می‌آوریم.
فرض کنید جواب عمومی معادله $y'=g_i(x,y)$ برابر $G_i(x,y,c)=0$ باشد، در اینصورت جواب عمومی معادله فوق برابر است با

$$G_1(x,y,c)\times G_2(x,y,c)\times\cdots\times G_n(x,y,c)=0$$

مثال ۱: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'^2+(y-2x)y'-2xy=0$ را بدست آورید.

$$y'+(y-2x)y'-2xy=0$$

$$(y'+y)(y'-2x)=0\qquad\begin{cases}y'=-y\Rightarrow y=ce^{-x}\\ y'=2x\Rightarrow y=x^2+c\end{cases}$$

جواب عمومی : $(y-ce^{-x})(y-x^2-c)=0$

مثال 2:

$$y'^2 = 4y^2 \Rightarrow y'^2 - 4y^2 = 0$$

$$(y'-2y)(y'+2y) = 0$$

$$\begin{cases} y'-2y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = 2\,dx \Rightarrow \ln(y) = 2x + c \Rightarrow y = ce^{2x} \\ y'+2y = 0 \Rightarrow y = ce^{-2x} \end{cases}$$

$$(y - ce^{2x})(y + ce^{-2x}) = 0$$

مثال 3:

$$y'^2 - (3y^2 + \cos(x))y' + 3y^2\cos(x) = 0$$

$$(y-3y^2)(y'-\cos(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 3y^2 \\ y' = \cos(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 3\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = 3x + c$$

$$3x + \frac{1}{y} + c = 0$$

$$y' = \cos(x) \Rightarrow y = \sin(x) + c$$

$$(y - \sin(x) + c)(3x + \frac{1}{y} + c) = 0$$

حالت دوم:
اگر معادله بصورت $F(y') = 0$ باشد و معادله $F(t) = 0$ حداقل یک ریشه حقیقی بصورت $t = k$ داشته باشد، آنگاه $F(k) = 0$ و لذا: $y' = k \Rightarrow y = kx + c \Rightarrow k = \frac{y-c}{x}$

پس $F(\frac{y-c}{x})$ جواب عمومی معادله خواهد بود.

مثال: $y'^3 + 3y' - 1 = 0$
اگر معادله $t^3 + 3t - 1$ را در نظر بگیریم، چون این معادله یک چندجمله‌ای درجه فرد است، لذا حداقل یک ریشه حقیقی مانند $t = k$ دارد. بنابراین $y' = k \Rightarrow y = kx + c \Rightarrow k = \frac{y-c}{x}$

پس جواب عمومی معادله بصورت $(\frac{y-c}{x})^3 + 3(\frac{y-c}{x}) - 1 = 0$ است.

حالت سوم:
معادله مرتبه اول نسبت به y قابل حل باشد یعنی داشته باشیم $y=f(x,y')$. برای حل این معادله کافیست $y'=p$ در نظر میگیریم و پس از مشتق گیری از طرفین معادله، جواب معادله را بصورت پارامتری برحسب p بدست می آوریم.

مثال 1:

① $y'^2-yy'+e^x=0$

$$-yy'=-y'^2+e^x \Rightarrow y=\frac{y'^2+e^x}{y'}$$

$$y'=p \Rightarrow y=\frac{p^2+e^x}{p}=p+\frac{e^x}{p} \qquad (*)$$

حال برای محاسبه x برحسب p، از طرفین نسبت به x مشتق میگیریم:

$$p=y'=p'+\frac{e^x p-p'e^x}{p^2} \Rightarrow p=p'+\frac{e^x}{p}-\frac{e^x}{p^2}p'$$

$$p=\frac{dp}{dx}+\frac{e^x}{p}-\frac{e^x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\left(p-\frac{e^x}{p}\right)=\left(1-\frac{e^x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p\left(1-\frac{e^x}{p^2}\right)dx+\left(\frac{e^x}{p^2}-1\right)dp=0$$

$$\left(\frac{e^x}{p^2}-1\right)(-p\,dx+dp)=0$$

اگر $\frac{e^x}{p^2}-1=0$، دراینصورت $\frac{e^x}{p^2}=1$ پس $e^x=p^2$ که با قرار دادن آن در $(*)$ داریم:

$$y=p+\frac{p^2}{p}=2p \Rightarrow y^2=4p^2 \Rightarrow y^2=4e^x$$

اگر $-p\,dx+dp=0$ دراینصورت:

$$-dx+\frac{dp}{p}=0 \Rightarrow -x+\ln(p)=c$$

$$\Rightarrow x=\ln(p)+c$$

با قرار دادن x در $(*)$ داریم:

$$y=p+\frac{e^{\ln(p)+c}}{p}=p+\frac{pe^c}{p}=p+e^c$$

لذا جواب عمومی معادله به فرم پارامتری بصورت زیر است

$$\begin{cases} x=\ln(p)+k \\ y=p+e^c \end{cases}$$

② مثال 2: اگر $y'>0$، معادله دیفرانسیل $y=2xy'+tg^{-1}(xy'^2)$ را حل نمایید.

$$y'=p \Rightarrow y=2xp+tg^{-1}(xp^2)$$

$$dy=\left(2p+\frac{p^2}{1+x^2p^4}\right)dx+\left(2x+\frac{2px}{1+x^2p^4}\right)dp$$

چون $y'=\frac{dy}{dx}=p$، لذا $dy=p\,dx$

$$p\,dx=\left(2p+\frac{p^2}{1+x^2p^4}\right)dx+2x\left(1+\frac{p}{1+x^2p^4}\right)dp$$

$$p\left(1+\frac{p}{x^2p^4}\right)+2x\left(1+\frac{p}{1+x^2p^4}\right)\frac{dp}{dx}=0$$

$$\left(1+\frac{p}{x^2p^4}\right)\left(p+2x\frac{dp}{dx}\right)=0$$

چون $y'=p>0$، لذا $1+\frac{p}{x^2p^4}\neq 0$، بنابراین باید

$$p+2x\frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}=-\frac{dx}{2x}$$

$$Ln(p)=-\frac{1}{2}Ln(x)+c \Rightarrow p=\frac{c}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} y=2xp+tg^{-1}(xp^2) \\ p=\frac{c}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow y=2\sqrt{c}\,x+tg^{-1}(c)$$

حالت چهارم: معادله مرتبه اول برحسب x قابل حل باشد یعنی $x=f(y,y')$. در این حالت نیز مشابه قبل عمل می‌کنیم، یعنی قرار می‌دهیم $y'=\frac{dy}{dx}=p$ یا به طور معادل $dx=\frac{dy}{p}$

سپس با دیفرانسیل‌گیری از طرفین معادله و قرار دادن $\frac{dy}{p}$ به جای dx خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{p}=dx=\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

معادله دیفرانسیل فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به p است. چنانچه جواب عمومی آن بصورت $g(y,p,c)=0$ باشد. جواب عمومی معادله با حذف p از دستگاه زیر (درصورت امکان) بدست می‌آید و در غیر اینصورت جواب به صورت پارامتری برحسب p خواهد بود.

$$\begin{cases} x=f(y,p) \\ g(y,p,c)=0 \end{cases}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید:

$$y = 2xy' + y^2 y'^3$$

$$x = \frac{y - y^2 p^3}{2p} \qquad (1)$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{2p} - y p^2\right) dy + \left(-\frac{1}{2p^2} y - y^2 p\right) dp$$

با تقسیم طرفین بر dy داریم:

$$\left(-\frac{1}{2p} - y p^2\right) - \frac{y}{2p^2}(1 + 2yp^3)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2p}(1 + 2yp^3) - \frac{y}{2p^2}(1 + 2yp^3)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow (1 + 2yp^3)\left(-\frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 2yp^3 = 0 \\ \dfrac{1}{2p} + \dfrac{y}{2p^2}\dfrac{dp}{dy} = 0 \end{cases}$$

$$1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$$

$$Ln(p) = -Ln(y) + c \Rightarrow p = \frac{c}{y} \Rightarrow y = \frac{c}{p}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y - y^2 p^3}{2p} \\ p = \dfrac{c}{y} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y - y^2 \frac{c^3}{y^3}}{\frac{2c}{y}} \Rightarrow x = \frac{y^2 - c^3}{2c}$$

حالت پنجم: معادله دیفرانسیل فاقد x می‌باشد یعنی بصورت $f(y, y') = 0$ باشد، در این صورت سه حالت رخ می‌دهد.

1) y' برحسب y قابل حل است یعنی $y' = g(y)$ می‌باشد که معادله دیفرانسیل جداشدنی است و به سادگی حل می‌شود.

2) y برحسب y' قابل حل باشد یعنی داریم $y = g(y')$. مشابه حالت قبل قرار می‌دهیم $y' = p$ و با دیفرانسیل‌گیری از طرفین مسأله حل می‌شود.

(3) اگر نتوان مسأله را به حالت (1) یا (2) تبدیل کرد یعنی $f(y, y') = 0$ در این حالت ابتدا به دنبال توابعی چون $g(t)$ و $h(t)$ چنان می‌گردیم که $f(g(t), h(t)) = 0$. حال با قرار دادن

$$\begin{cases} y = g(t) \\ y' = \dfrac{dy}{dx} = h(t) \end{cases} \qquad 1$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} dy = g'(t)\,dt \\ dy = h(t)\,dx \end{cases} \Rightarrow g'(t)\,dt = h(t)\,dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{g'(t)}{h(t)}\,dt \Rightarrow x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}\,dt + c \quad ②$$

دراینصورت چنانچه بتوان از دستگاه شامل معادلات ① و ② بتوان t را حذف کرد، جواب عمومی بدست می‌آید و در غیراینصورت جواب به‌صورت پارامتری برحسب t خواهد بود

$$\begin{cases} y = g(t) \\ x = \int \frac{g'(t)}{h(t)}\,dt + c \end{cases}$$

حالت ششم: معادله دیفرانسیل مرتبه اول فاقد y باشد یعنی به فرم کلی $f(x, y') = 0$ باشد، مانند حالت قبل سه حالت ممکن است رخ دهد.

1) اگر y' برحسب x قابل حل باشد یعنی داشته باشیم $y' = g(x)$ در این حالت معادله به سادگی قابل حل است.
$y = \int g(x)\,dx + c$

2) اگر x برحسب y' قابل حل باشد یعنی داشته باشیم $x = g(y')$ دراینصورت مانند حالت چهارم قرار می‌دهیم $y' = p$ و با دیفرانسیل گیری از طرفین جواب مسأله را بدست می‌آوریم

3) فرض کنید معادله را نتوان برحسب x و y' حل کرد یعنی $f(x, y') = 0$ در این حالت اگر بتوان دو تابع چون $g(t)$ و $h(t)$ چنان یافت که $f(g(t), h(t)) = 0$ می‌توانیم قرار دهیم

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y' = h(t) \end{cases} \quad ① \quad \begin{cases} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,d(t) \\ \frac{dy}{dx} = h(t) \quad dy = h(t)\,dx \end{cases}$$

$$dy = h(t)\,g'(t)\,dt \Rightarrow y = \int h(t)\,g'(t)\,dt + c \quad ②$$

دراینصورت چنانچه بتوان از دستگاه شامل ① و ② پارامتر t را حذف کرد، جواب عمومی به دست خواهد آمد. درغیراینصورت جواب به‌صورت پارامتری برحسب t خواهد بود.

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید

① $yy' = e^y$

معادله فاقد x می‌باشد و برحسب y' قابل حل است:

$$y' = \frac{e^y}{y} \Rightarrow y e^{-y}\,dy = dx \Rightarrow \int dx = \int y e^{-y}\,dy$$

	u	dv
$+$	y	e^{-y}
$-$	1	$-e^{-y}$
$+$	0	e^{-y}

$$x = (-y-1)\,e^{-y} + c$$

② $y = y' + \ln(y')$

$$\left[y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx\right]$$

$y = p + \ln(p)$ ①

$dy = (1 + \frac{1}{p})\,dp \Rightarrow p\,dx = (1 + \frac{1}{p})\,dp$

$dx = (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})\,dp \Rightarrow x = \ln(p) - \frac{1}{p} + c$ ②

$$\begin{cases} y = p + \ln(p) \\ x = \ln(p) - \frac{1}{p} + c \end{cases}$$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y'} = 1$

اگر قرار دهیم $x = \cos^4(t)$ و $y' = \sin^4(t)$ آنگاه داریم:

$\sqrt{x} + \sqrt{y'} = 1$

$$\begin{cases} x = \cos^4(t) \Rightarrow dx = -4\sin(t)\cos^3(t)\,dt \\ y' = \sin^4(t) \Rightarrow dy = \sin^4(t)\,dx \end{cases}$$

$dy = \sin^4(t).(-4\sin(t)\cos^3(t))\,dt$

$y = -4\int \sin^5(t)\cos^3(t)\,dt$

$y = -4\int \sin^5(t)(1 - \sin^2(t)\cos(t)\,dt)$

$= -4\int (\sin^5(t) - \sin^7(t))\cos(t)\,dt$

$= -4\int (u^5 - u^7)\,du \qquad [u = \sin(t)]$

$= -4\frac{u^6}{6} + \frac{4u^8}{8} + c = -\frac{4}{6}\sin^6(t) + \frac{4}{8}\sin^8(t) + c$

لذا جواب معادله به‌صورت پارامتری زیر است:

$$\begin{cases} x = \cos^4(t) \\ y = -\frac{2}{3}\sin^6(t) + \frac{1}{2}\sin^8(t) + c \end{cases}$$

 ۹۹،۱،۱۵ امیرحسین سبحانی