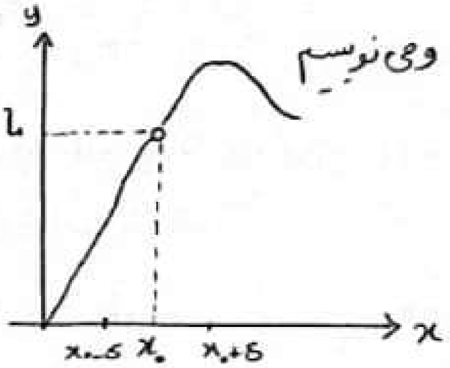
تعریف دقیق حد: فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه x_0 تعریف شده باشد در اینصورت گوییم حد تابع f در x_0 به مقدار L میل می‌کند و می‌نویسیم



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ مقداری چون δ، چنان موجود باشد که

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

همسایگی محذوف x_0

تذکر: در تعریف فوق δ به مقدار ε بستگی دارد.

مثال: به کمک تعریف فوق نشان دهید که

1) $\lim_{x \to 1} (3x - 8) = -5$

حل: فرض کنید که $\varepsilon > 0$ دلخواه و از این پس ثابت باشد، باید نشان دهیم که برای این ε مقداری مانند $\delta > 0$ چنان موجود است که $|x-1| < \delta$ رابطه $|3x - 8 - (-5)| < \varepsilon$ را اثبات می‌کند، اما داریم:

$$|3x - 8 - (-5)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$$

نامساوی اخیر نشان می‌دهد برای برقراری نامساوی بالا کافیست

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

---

2) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| = |x-2||x+2| \leq \delta |x+2|$$

اگر $\delta < 1$ باشد لذا $-1 < x-2 < 1$. بنابراین

$$1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5 \Rightarrow |x+2| < 5 \Rightarrow |x^2 - 4| \leq 5\delta$$

لذا اگر $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ انتخاب شود حکم برقرار است.

3) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

حل: $|x \sin(\frac{1}{x}) - 0| \leq |x| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon$

تذکر: طبق تعریف فوق، برای وجود حد تابع f در x_0، f باید حتماً در یک همسایگی محذوف x_0 تعریف شده باشد.

مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ در صفر حد ندارد.

حل: چون این تابع در فاصله $0 \leq x < 1$ تعریف نشده است، لذا در هیچ همسایگی محذوفی از صفر تعریف نمی‌شود، بنابراین در صفر حد ندارد.

مثال: حد تابع زیر را بررسی کنید. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{[1 - \cos(x)]}$

حل: چون $|\cos(x)| \leq 1$ وقتی که x به سمت صفر میل می‌کند، $[1 - \cos(x)] = 0$ لذا تابع فوق مشابه مثال قبل در هیچ همسایگی از صفر تعریف نشده است و بنابراین حد ندارد.

مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})}$ در نقطه صفر حد ندارد.

حل: این تابع در هیچ همسایگی محذوفی از $x_0 = 0$ تعریف نشده است. چون هر همسایگی از صفر را که در نظر بگیریم به ازای nهای به اندازه کافی بزرگ، عدد $\frac{1}{n\pi}$ در این همسایگی قرار دارد که

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{\sin(n\pi)} = \frac{1}{\underset{\text{مطلق}}{0}} \quad [\text{تعریف نشده}]$$

قضیه: هرگاه $f(x)$ در x_0 حد داشته باشد، $f(x)$ در یک همسایگی محذوف x_0 کراندار است.

مثال: بنابر قضیه فوق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $x=0$ حد ندارد.

قضیه: هرگاه $f(x)$ در x_0 حد داشته باشد، این حد منحصر بفرد است.

نتیجه: اگر تابع f در نقطه x_0 دارای حد L باشد، برای هر دنباله مانند $\{a_n\}$ که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ باید داشته باشیم: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$

این نتیجه برای اثبات عدم وجود حد بیشتر به کار گرفته می‌شود.

مثال: نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ موجود نیست.

حل: $a_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$ $\qquad$ $b_n = \frac{1}{(4n-1)\frac{\pi}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$\times$

مثال: حد زیر را بررسی کنید

$$\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$$

حل: $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $b_n = -\frac{1}{n}$ $\qquad$ $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{n} = \infty$$

$\times$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

لذا در صفر حد موجود نیست

قضیه: اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2$

1) $\lim_{x\to x_0} f(x)\pm g(x)=L_1\pm L_2$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=L_1L_2$

3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$ اگر $L_2\neq 0$

قضیه فشردگی (ساندویچ): هرگاه $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$ و $\lim_{x\to x_0} f_1(x)=\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L$

در اینصورت $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$

مثال: مطلوب محاسبه $\lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{2}{x^2}\right]$

$$\frac{2}{x^2}-1<\left[\frac{2}{x^2}\right]\leqslant\frac{2}{x^2}\Rightarrow 2-x^2<x^2\left[\frac{2}{x^2}\right]\leqslant 2$$

$$\lim_{x\to 0} 2=2,\ \lim_{x\to 0} 2-x^2=2$$

لذا بنابر قضیه ساندویچ حدفوق موجود و برابر 2 است.

$$\lim_{x\to 0} x^2\left[\frac{2}{x^2}\right]=2$$

قضیه: هرگاه $f(x)$ در یک همسایگی محذوفی از x_0 کراندار باشد و $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ آنگاه

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$$

مثال: $\lim_{x\to 0} (x^2-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)=0$

$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$0\times$ کراندار $=0$

$\lim_{x\to 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

حدود یکطرفه:

حد راست: تابع f در نقطه x_0 دارای حد راست است اگر برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ ای موجود باشد که

$$x_0 < x < x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

در اینصورت می‌نویسیم:
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

حد چپ: به طور مشابه گوییم تابع f در x_0 دارای حد چپ است اگر برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ ای چنان موجود باشد که

$$x_0-\delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

مثال: نشان دهید تابع $\sqrt{x}$ در صفر دارای حد راست است.

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0 \qquad 0<x<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-0|=\sqrt{x}<\varepsilon \Rightarrow x<\varepsilon^2$$

لذا با انتخاب $\delta=\varepsilon^2$ حکم برقرار است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای وجود حد تابع f در x_0 آن است که حد چپ و راست آن موجود بوده و برابر باشند.

مثال: تابع $f(x)=[x]$ اگر $x_0\in\mathbb{Z}$ فاقد حد است چون اگر $x_0=n\in\mathbb{Z}$ در اینصورت:

$$\lim_{x\to x_0^-}[x]=n-1$$

$$\lim_{x\to x_0^+}[x]=n$$

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{|x-2|}{x^2+x-6}$ را در نقطه $x_0=2$ بررسی کنید

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x+3}=-\frac{1}{5}$$

لذا f در $x_0=2$ حد ندارد

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1} = \frac{4+9+7}{3+1+1} = 4$$

2) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x-6 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2+2x+3 \\ \quad 2x^2-x-6 & \\ \quad 2x^2-4x & \\ \qquad 3x-6 & \\ \qquad 3x-6 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-9x-2 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2+5x+1 \\ \quad 5x^2-9x-2 & \\ \quad 5x^2-10x & \\ \qquad\quad x-2 & \\ \qquad\quad x-2 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

3) $$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{(\sqrt{6x^2+3}+3x)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{-3(x^2-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{-3(x-1)} = 1$$

4) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos^3(x)} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos^2(x)}{(1+\cos(x))(1-\cos(x)+\cos^2(x))}$

$[a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)]$

$= \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(1+\cos(x))(1-\cos(x))}{(1+\cos(x))(1-\cos(x)+\cos^2(x))} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)+\cos^2(x)} = \dfrac{2}{3}$

---

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$

$z^3 = 26+x \Rightarrow x = z^3-26$

لذا وقتی که $x\to 1$ ، $z\to 3$

$= \lim\limits_{z\to 3} \dfrac{2z^3-54}{z-3} = \lim\limits_{z\to 3} \dfrac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3}$

$= \lim\limits_{z\to 3} 2(z^2+3z+9) = 54$

---

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right)$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2-1}\,(\sqrt{x}+1)} + \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}\,(\sqrt{x}+1)} + \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

حد در بینهایت: گوییم تابع f در ∞ به L میل می‌کند اگر برای هر ε، مقدار $M>0$ چنان موجود باشد که $x>M$ ایجاب کند

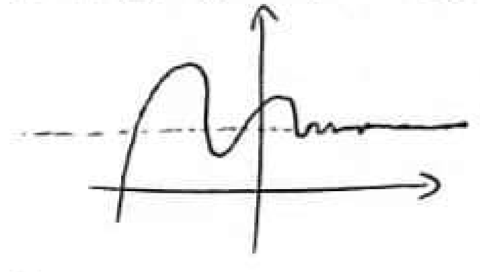
$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

در اینصورت می‌نویسیم

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

به طریق مشابه حد زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$



مثال: نشان دهید $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

حل: فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه و از این پس ثابت باشد

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}<\varepsilon$$ اگر $x>\frac{1}{\varepsilon}$

لذا $M=\frac{1}{\varepsilon}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2}{3}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \qquad \infty \times 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x+1}\,\left(1-\sqrt{2x+3}\right)}{7-6x+4x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\sqrt{2+\frac{3}{x}}}{x^2\left(4-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

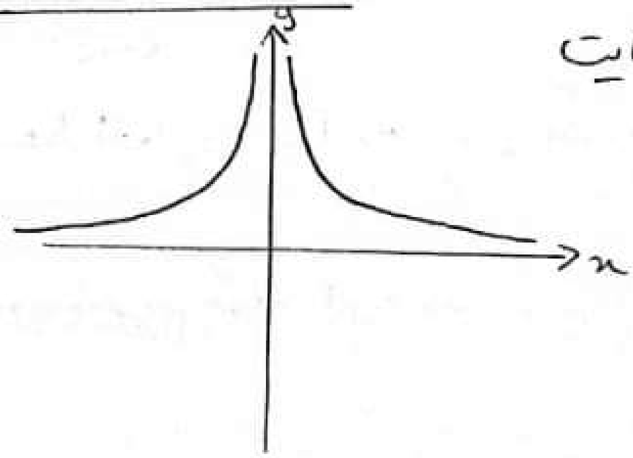
$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right) \qquad \infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}}$$

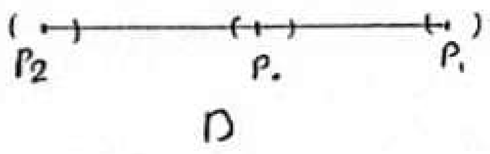
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-x^2+2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = \frac{-4}{2} = -2$$

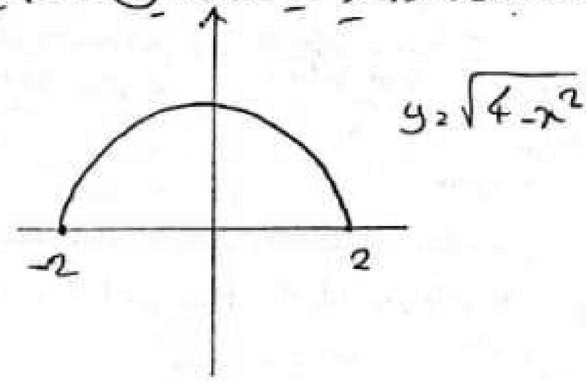
حد بی‌نهایت

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



تعریف: نقطه P در دامنه یک تابع یک نقطه درونی از دامنه نامیده می‌شود اگر متعلق به همسایگی باز در دامنه باشد. در غیر اینصورت این نقطه یک نقطه انتهایی نامیده می‌شود



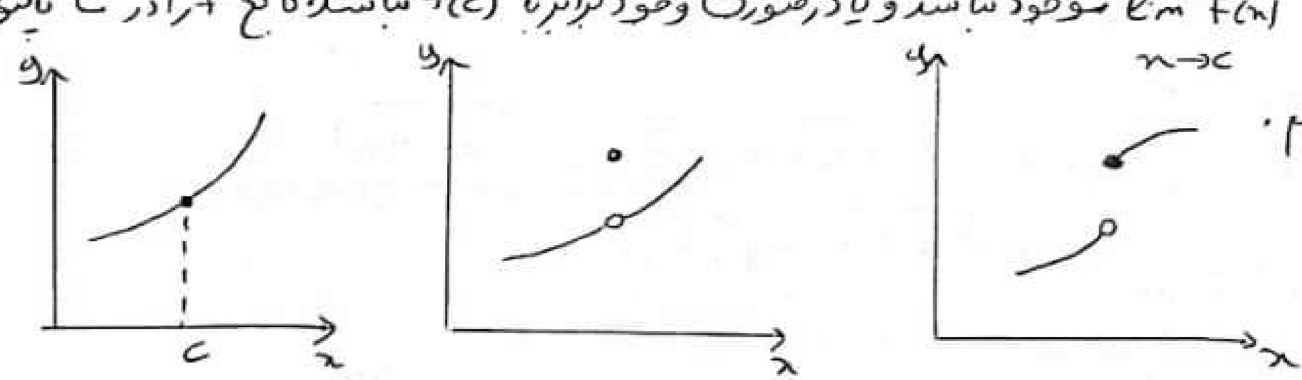


(-2,2) نقاط درونی و 2، -2 نقاط انتهایی

پیوستگی در نقاط درونی: گوییم تابع f در نقطه درونی c پیوسته است اگر

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

اگر $\lim_{x \to c} f(x)$ موجود نباشد و یا در صورت وجود برابر با $f(c)$ نباشد، تابع f را در c ناپیوسته گوییم.



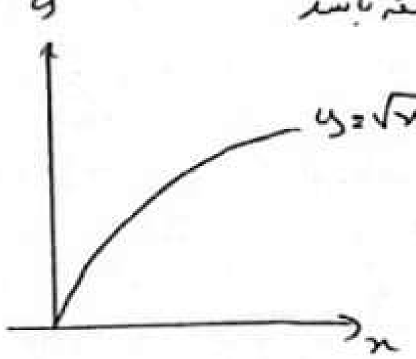
تعریف: تابع f را در نقطه c از راست پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ و تابع f را در نقطه c، از چپ پیوسته گوییم اگر $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.

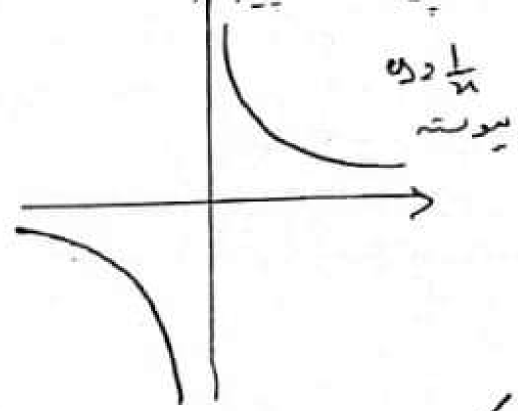
پیوستگی در نقاط انتهایی: تابع f را در نقطه انتهایی چپ از دامنه پیوسته گوییم، هرگاه در این نقطه پیوسته از راست باشد.

تابع f را در نقطه انتهایی راست از دامنه پیوسته گوییم هرگاه در این نقطه پیوسته از چپ باشد.

پیوستگی روی بازه:

تابع f را روی بازه I پیوسته گوییم، اگر در هر نقطه از I پیوسته باشد. در حالت خاص تابع f را پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه از دامنه f، پیوسته باشد





تذکر: توابع زیر روی دامنهٔ خود پیوسته هستند:

چندجمله‌ای ها، توابع گویا، توابع $x^{m/n}$، سینوسی، کسینوسی، تانژانت، کتانژانت سکانت، تابع $|x|$

قضیه:

فرض کنید f و g هر دو در بازه ای شامل نقطه c تعریف شده و هر دو در c پیوسته باشند در اینصورت توابع زیر در c پیوسته هستند:

1) $f \pm g$ 3) kf k یک عدد ثابت

2) fg 4) f/g مشروط بر اینکه $g(c) \neq 0$

5) $(f(x))^{1/n}$, (در صورتیکه n زوج باشد، مشروط بر اینکه $f(c) > 0$)

قضیه (ترکیب توابع پیوسته):

اگر $f(g(x))$ روی بازه‌ای شامل c تعریف شده باشد، و اگر f در L پیوسته بوده و $\lim_{x \to c} g(x) = L$ در اینصورت:

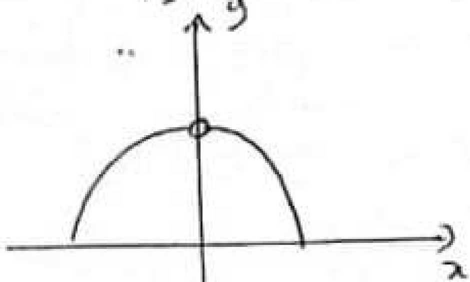
$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \to c} g(x))$$

در حالت خاص اگر g در c پیوسته باشد یعنی $L = g(c)$، در اینصورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ در c پیوسته است و

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

تعریف:

اگر تابع f در نقطه a تعریف نشده یا ناپیوسته باشد ولی بتوان تابع f را در این نقطه چنان تعریف کرد که تابع در آن پیوسته شود، این ناپیوستگی را رفع شدنی گوییم



$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

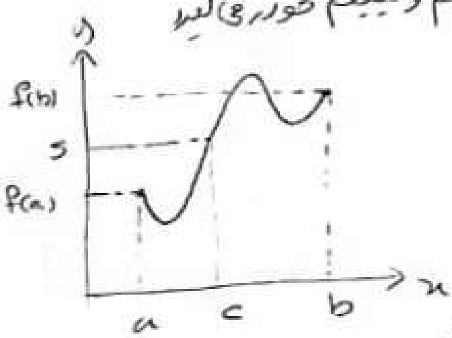
قضیه (ماکسیمم - مینیمم):

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته روی بازه بسته و متناهی $[a,b]$ باشد، در اینصورت روی این بازه مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق خود را می‌گیرد، به عبارتی دیگر مقادیر p و q در $[a,b]$ چنان موجودند که برای هر $x \in [a,b]$

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

بنابراین، f مقدار ماکسیمم مطلق خود $M=f(q)$ را در q و مقدار مینیمم مطلق خود $m=f(p)$ را در p می‌گیرد.

قضیه مقدار میانی: اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد و s مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در اینصورت مقداری چون c متعلق به $[a,b]$ چنان موجود است که $s=f(c)$. در حالت خاص یک تابع پیوسته تعریف شده روی یک بازه بسته تمام مقادیر بین مقدار ماکسیمم و مینیمم خود را می‌گیرد.



نتیجه: اگر تابع f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ در اینصورت تابع f در این بازه حداقل دارای یک ریشه است.

این نتیجه منتج به روش تنصیف در محاسبه ریشه‌های یک معادله در آنالیز عددی می‌شود.

مثال: نشان دهید تابع $x^3-x-1=0$ دارای حداقل یک ریشه در فاصله $[1,2]$ است.

$f(1)=-1$ $\quad$ $f(2)=5$ $\quad$ $f(1)f(2)=-5<0$

تعریف مشتق:

مشتق تابع f، تابع دیگری است که با $f'(x)$ نمایش داده شده و در تمام نقاطی که حد زیر موجود است بصورت $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تعریف می‌شود.

اگر $f'(x)$ موجود باشد، تابع f را در x مشتق‌پذیر گوییم.

توجه: مقدار مشتق تابع f در نقطه خاصی مانند x_0، می‌تواند به صورت یکی از حدود زیر نمایش داده شود:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

تذکر: مشابه تعریف حد راست و حد چپ، می‌توان مشتق راست و مشتق چپ را تعریف کرد:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

تعریف: تابع f را روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه $f'(x)$ برای $x \in (a,b)$ و $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ موجود باشند.

مثال: مشتق $f(x) = x^3 - x$ را بیابید.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3-(x+h)]-[x^3-x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} = \lim_{h \to 0} 3x^2+3xh+h^2-1 = 3x^2-1$$

مثال: مشتق $f(x)=\sqrt{x}$ را بیابید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نمادگذاری: برای نمایش مشتق تابع $y=f(x)$ می توان از نمادهای زیر استفاده کرد.

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

نمادهای D و $\frac{d}{dx}$ عملگرهای مشتق گیری نامیده می شوند. نماد $\frac{dy}{dx}$ که توسط لایبنیتز معرفی شده است نباید با تقسیم اشتباه گرفته شود. همچنین برای محاسبه مشتق $\frac{dy}{dx}$ در یک نقطه مانند a از نماد زیر استفاده می کنیم

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=|x|$ را محاسبه کنید.

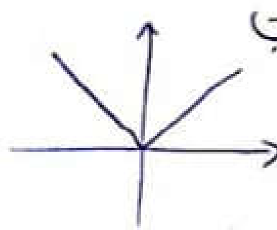
$$x>0:\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$x<0:\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'_+(0)=1\quad,\quad f'_-(0)=-1$$

لذا در صفر مشتق پذیر نیست

$$f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



قضیه: اگر f در a مشتق پذیر باشد، در a پیوسته است.

قواعد مشتق گیری:

1) $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(c) = 0$$

2) $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \Leftarrow f(x) = x^n$ اگر

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + x a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + x a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = n a^{n-1}$$

در حالت کلی اگر r یک عدد حقیقی باشد، $\frac{d}{dx}(x^r) = r x^{r-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

قضیه: اگر f و g در x مشتق پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد، در این صورت توابع $f \pm g$ و cf در x مشتق پذیر بوده و داریم:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(cf)'(x) = c f'(x)$$

مثال:

$f(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{x}-18$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+3x^{-1}-18$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-2}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$

$f(x)=2x^3-5x^2+4x+2$

$f'(x)=6x^2-10x+4$

قضیه (مشتق ضرب): اگر f و g توابعی مشتق پذیر در x باشند، در اینصورت fg در x مشتق پذیر است و

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

مثال:

1) $\frac{d}{dx}((x^2+1)(x^3+4))=2x(x^3+4)+(x^2+1)(3x^2)$

$=5x^4+3x^2+8x$

2) $\frac{d}{dx}((2\sqrt{x}+\frac{3}{x})(3\sqrt{x}-\frac{2}{x}))$

$=\frac{d}{dx}((2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-1})(3x^{\frac{1}{2}}-2x^{-1}))$

$=(x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-2})(3x^{\frac{1}{2}}-2x^{-1})+(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-1})(\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-2})$

$=6-\frac{5}{2x^{\frac{3}{2}}}+\frac{12}{x^3}$ $\qquad (uv)'=u'v+v'u$

قضیه: اگر f و g در x مشتق پذیر باشند و $g(x)\neq 0$ در اینصورت $\frac{f}{g}$ در x مشتق پذیر بوده و

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال:

1) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

2) $\frac{\sqrt{t}}{3-5t}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{t}}{3-5t}\right)=\frac{(3-5t)\frac{1}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\,(-5)}{(3-5t)^2}=\frac{3+5t}{2\sqrt{t}\,(3-5t)^2}$$

مشتق توابع نمایی: تابع نمایی $f(x)=b^x$ را در نظر بگیرید

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{b^x b^h-b^x}{h}=b^x\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

توجه کنید که $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$ لذا

$$f'(x)=f'(0)\,b^x$$

بنابراین با توجه به تعریف تابع e^x،

$$\left.\frac{d}{dx}(e^x)\right|_{x=0}=1$$

لذا $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

همچنین می‌توان نشان داد که در حالت کلی

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=\ln(b)$$

لذا $\frac{d}{dx}(b^x)=b^x\ln(b)$

مثال:

1) $f(x) = e^x - x^2$

$f'(x) = e^x - 2x$

2) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$

3) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)e^x - (2x)e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

قضیه (مشتق تابع مرکب): اگر $g(x)$ و $f(u)$ در $u = g(x)$ در x مشتق پذیر باشند در اینصورت تابع مرکب

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ در x مشتق پذیر بوده و

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

بعبارت دیگر

$$(f(u))' = u' f'(u)$$

تذکر: (نمایش لایبنیتزی مشتق تابع مرکب)

اگر $y = f(u)$ و $u = u(x)$ در اینصورت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال:

1) $y = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad u = x^2+1 \Rightarrow y = \sqrt{u}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times (2x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) $y = (x^2+3x-1)^{15}$ $\qquad u = x^2+3x-1$

$$\Rightarrow y' = 15(x^2+3x-1)^{14}(2x+3) = 15(2x+3)(x^2+3x-1)^{14}$$

مثال :

3) $y = (e^x + 2x - 1)^{3/4}$ $\qquad u = e^x + 2x - 1$

$y' = \frac{3}{4}(e^x + 2x - 1)^{-\frac{1}{4}}(e^x + 2)$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dx}(u^r) = r u^{r-1} \frac{du}{dx} \\ \\ (u^r)' = r u' u^{r-1} \end{array}\right]$$

4) $y = e^{(x^2 + 2x - 1)}$

$y' = (2x + 2) e^{(x^2 + 2x - 1)}$

مشتق توابع مثلثاتی :

1) $y = \sin(x)$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) = \cos(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin^2(\frac{h}{2})}{h} \qquad \theta = \frac{h}{2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{(\theta)} \sin\theta = 0$$

2) $y = \cos(x)$

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

3) $y = \tan(x)$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

بطورخلاصه داریم :

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x) \qquad \frac{d}{dx}(\cot(x)) = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\,tg(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc(x)) = -\csc(x)\cot(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sec(x)\,tg(x)$$

$f(u)$	$\frac{d}{dx} f(u)$
c	0
u^n	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
a^u	$u' a^u Ln(a)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\tan(u)$	$u' \sec^2(u)$
$\cot(u)$	$-u' \csc^2(u)$
$\sec(u)$	$u' \sec(u) \, tg(u)$
$\csc(u)$	$-u' \csc(u) \cot(u)$

مثال: مطلوب است محاسبه مشتقات زیر:

① $y = e^{\overbrace{\sec(\theta)}^{u}}$

$$\Rightarrow y' = \sec\theta \, tg\,\theta \, e^{\sec(\theta)}$$

② $y = e^{2x}\cos(x) \Rightarrow y' = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\sin(x)$

③ $y = tg(\cos(x^2+1)) \Rightarrow y' = -2x\sin(x^2+1)\sec^2 \cos(x^2+1)$

④ $y = 3^{\cos(x)}$

$$\Rightarrow y' = -\sin(x)\, 3^{\cos(x)} \ln(3)$$

⑤ $F(t) = e^{t\sin(2t)}$

$$\Rightarrow F'(t) = (\sin(2t) + 2t\cos(2t))e^{t\sin(2t)}$$

⑥ $y = \cot^2(\sin(\theta)) \quad u = \cot(\sin(\theta)) \Rightarrow y = u^2 \Rightarrow y' = 2u'u$

$u' = -\cos\theta \csc^2(\sin(\theta))$

$\Rightarrow y' = -2\cos(\theta)\csc^2(\sin(\theta))\cot(\sin(\theta))$

⑦ $y = e^{\sin(2x)} + \sin(e^{2x})$

$y' = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)} + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$

⑧ $y = tg(\underbrace{\sec(\cos(t))}_{u}) \Rightarrow y' = -\sin(t)\sec(\cos(t))\,tg(\cos(t))\sec^2(\sec(\cos(t))$

$u = \sec(\underbrace{\cos(t)}_{v}) \Rightarrow u' = v'\sec(v)\,tg(v)$

$\Rightarrow u' = -\sin(t)\sec(\cos(t))\,tg(\cos(t))$

تمرین: مشتق زیر را پیدا کنید

$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

مشتقات مراتب بالاتر:

اگر مشتق تابع $y=f(x)$ ، $y'=f'(x)$ خود در x مشتق پذیر باشد، می توان مشتق آن را محاسبه کرد و مشتق دوم تابع f نامید که با $y''=f''(x)$ نمایش داده می شود.

نمادهای مشتق دوم:

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=D_x^2y=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

مشابه بحث قبل می توان مشتقات مراتب بالاتر را نیز تعریف نمود.

اگر $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ مشتق $(n-1)$ ام تابع $y=f(x)$ باشد و این تابع خود در x مشتق پذیر باشد در اینصورت مشتق n ام تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right)$$

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=D_x^ny$$

مثال: مشتقات زیر را محاسبه کنید

① $y=x^n$

$$y'=nx^{n-1},\quad y''=n(n-1)x^{n-2},\ \dots,\ y^{(k)}=n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$

$$y^{(n)}=n(n-1)\times\dots\times2\times1=n!$$

$$y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\dots=0$$

② $y=\sin(x)$, $y'=\cos(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=-\sin(x)=\sin(x+\pi)=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$$

$$y^{(3)}=-\cos(x)=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

مشتق دوم تابع روبرو را حساب کنید.

③ $y = \sin(x^2)$

$y' = 2x\cos(x^2) \Rightarrow y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$

مشتق nام تابع زیر را حساب کنید

④ $y = \frac{1}{1+x}$ $\quad y = (1+x)^{-1}$

$y' = -(1+x)^{-2}$

$y'' = -(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}$

$y^{(3)} = 2(-3)(1+x)^{-4} = -3!\,(1+x)^{-4}$

$\vdots$

$y^{(n)} = (-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)}$

قضیه (قاعده لایبنیتز) :
فرض کنید u و v توابعی با مشتقات متوالی تا مرتبه n ام باشند، در اینصورت مشتق n ام تابع uv به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (x)$$

قضیه بالا را می توان به استقرا ی ثابت کرد.

مثال : مشتق 10 ام تابع $f(x) = x^4 \sin(x)$ را محاسبه کنید

$$(x^4 \sin(x))^{(10)} = \binom{10}{0} (\sin(x))^{(10)} x^4 + \binom{10}{1} (\sin(x))^{(9)} (x^4)'$$

$$+ \binom{10}{2} (\sin(x))^{(8)} (x^4)'' + \binom{10}{3} (\sin(x))^{(7)} (x^4)^{(3)} + \binom{10}{4} (\sin(x))^{(6)} (x^4)^{(4)}$$

$$+ \dots + \binom{10}{10} \sin(x) (x^4)^{(10)}$$

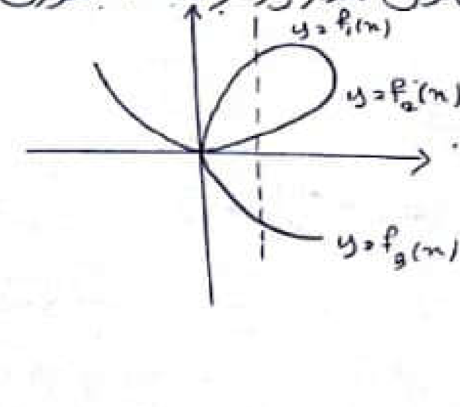
$$= -x^4 \sin(x) + 40 x^3 \cos(x) + 540 x^2 \sin(x)$$

$$-2880 x \cos(x) + 5040 \sin(x)$$

مشتق توابع ضمنی : برای محاسبه شیب نمودار $y = f(x)$ بسادگی می توان از این تابع در صورت وجود، مشتق گیری کرد ولی در حالت کلی یک نمودار در فضای $\mathbb{R}^2$ با یک معادله $F(x,y) = 0$ مشخص می شود که ممکن است نمایش دهنده یک یا چند تابع باشد. برای روشن شدن موضوع معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \qquad y^2 - x = 0 \qquad x^2 + y^2 - 25 = 0$$

این معادلات رابطه بین متغیرهای x و y را بصورت ضمنی بیان می کنند، به این صورت که یک مقدار x یک یا چند مقدار y را تعیین می کند. گاهی می توان مقدار y را برحسب x به صورت یک یا چند تابع صریح از x بدست آورد.



فولیوم
$x^3 + y^3 - 9xy = 0$

برای محاسبه مشتق ضمنی به ترتیب زیر عمل می کنیم :

۱) از طرفین معادله نسبت x مشتق می گیریم و با y به صورت تابعی از x برخورد کرده و در صورت لزوم از قاعده زنجیره ای استفاده می کنیم .

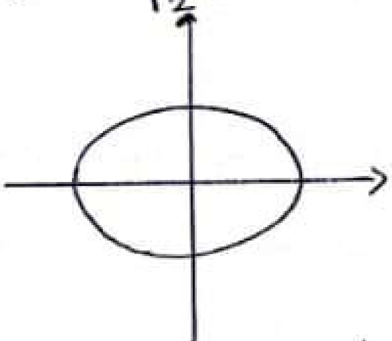
2) همه عبارات شامل $\frac{dy}{dx}$ را در قسمت چپ معادله و عبارات دیگر را در سمت راست قرار می دهیم، درنهایت با فاکتورگیری از $\frac{dy}{dx}$ در سمت چپ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ را بدست می آوریم.

مثال 1: مشتق تابع ضمنی $y^3+y^2-5y-x^2=-4$ را محاسبه کنید.

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0$$

$$(3y^2+2y-5)\frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

مثال 2 : شیب خط مماس بر نمودار $x^2+4y^2=4$ را در نقطه $\left(\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ بدست آورید.



$$x^2+4y^2=4$$

$$2x+8y\frac{dy}{dx}=0$$

$$8y\frac{dy}{dx}=-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

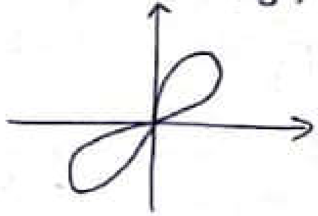
مثال 3 : شیب خط مماس بر نمودار $3(x^2+y^2)^2=100xy$ را در نقطه $(1,3)$ $(3,1)$ بدست آورید.

$$\frac{d}{dx}\left[3(x^2+y^2)^2\right]=\frac{d}{dx}\left[100xy\right]$$

$$3(2)(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=100\left[x\frac{dy}{dx}+y\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2+y^2)}{12y(x^2+y^2) - 100x} = \frac{25 - 3x(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2) - 25x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,1)} = \frac{13}{9}$$



لمنیسکات

مثال 4: با فرض اینکه $y^2 = x^2 + \sin(xy)$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + \left(y + x\frac{dy}{dx}\right)\cos(xy)$$

$$\left(2y - x\cos(xy)\right)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

نکته: اگر $F(x,y)=0$ داده شده باشد، برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ می‌توان از فرمول زیر کمک گرفت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

که در اینجا F_x مشتق جزئی F نسبت به x و F_y مشتق جزئی F نسبت به y است. به این ترتیب که برای محاسبه F_x از F نسبت به x مشتق می‌گیریم و فرض می‌کنیم y یک عدد ثابت است. و برای محاسبه F_y نیز از F نسبت به y مشتق می‌گیریم و فرض می‌کنیم x ثابت است.

مثال 5: مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در مثالهای قبل بدست آورید.

$$y^2 = x^2 + \sin(xy) \qquad \underbrace{y^2 - x^2 - \sin(xy)}_{F} = 0$$

$$F_x = -2x - y\cos(xy)$$

$$F_y = 2y - x\cos(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2x - y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

$$x^2+4y^2=4 \Rightarrow \underbrace{x^2+4y^2-4}_{f}=0$$

$$f_x=2x,\quad f_y=8y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=-\frac{2x}{8y}=-\frac{x}{4y}$$

$$3(x^2+y^2)^2=100xy \qquad \underbrace{3(x^2+y^2)^2-100xy}_{f}=0$$

$$f_x=6(x^2+y^2)(2x)-100y$$

$$f_y=6(x^2+y^2)(2y)-100x \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{12x(x^2+y^2)-100y}{12y(x^2+y^2)-100x}$$

محاسبه مشتقات مراتب بالاتر توابع ضمنی :

مثال : اگر $xy+y^2=2x$ ، $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ را بیابید

حل : ابتدا از طرفین معادله دوبار نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$xy'+y+2yy'=2$$

$$xy''+y'+y'+2yy''+2y'y'=0$$

$$\begin{cases}(x+2y)y'=2-y \Rightarrow y'=\frac{2-y}{x+2y}\\ (x+2y)y''=-(2y'+2y'^2) \Rightarrow y''=-\frac{2y'+2y'^2}{x+2y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y''=-2y'\,\frac{1+y'}{x+2y}=-2\,\frac{2-y}{x+2y}\,\frac{1+\frac{2-y}{x+2y}}{x+2y}\ \underset{\text{معادله}}{\overset{\text{کمک خود}}{=}}\ -\frac{8}{(x+2y)^3}$$

امیرحسین سبحانی ۹۹,۱,۱۴

مثال: اگر $x^2+y^2=25$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ را بیابید.

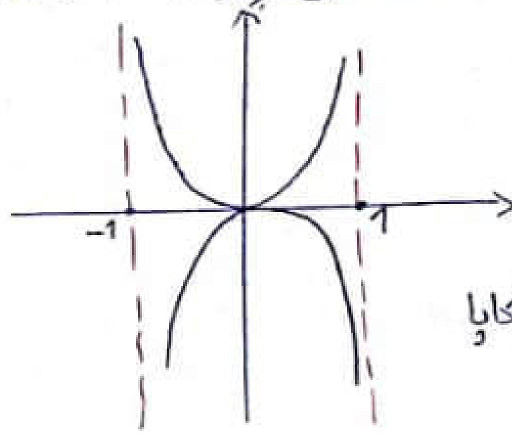
$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

$$2+2y'^2+2yy''=0 \Rightarrow 2yy''=-(2+2y'^2)$$

$$\Rightarrow y''=-\frac{(2+2y'^2)}{2y}=-\frac{(2+2\frac{x^2}{y^2})}{2y}=-\frac{\frac{y^2+x^2}{y^2}}{y}=-\frac{25}{y^3}$$

مثال: معادله خط مماس بر نمودار $x^2(x^2+y^2)=y^2$ در نقطه $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ را بیابید.

$$\underbrace{x^4+x^2y^2-y^2}_{F}=0$$



منحنی کاپا

$$4x^3+2xy^2+2yx^2\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2yx^2-2y)\frac{dy}{dx}=-(4x^3+2xy^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3+2xy^2}{2yx^2-2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{3/2}{\frac{1}{2}}=3$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=3(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow y=3x-\sqrt{2}$$

محاسبه مشتق توابع معکوس به کمک مشتق ضمنی:

مثال: اگر $y=\sin^{-1}(x)$ ، y' را محاسبه کنید.

$$y=\sin^{-1}(x) \Rightarrow \sin(y)=x \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$y'\cos(y)=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(x))}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال: $y=\tan^{-1}(x)$.

$$y=\tan^{-1}(x) \Rightarrow x=\tan(y) \Rightarrow 1=\sec^2(y)y'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{\sec^2(y)}=\frac{1}{1+\tan^2(y)}=\frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}(x))}=\frac{1}{1+x^2}$$

مثال: $y=\sec^{-1}(x)$.

$$y=\sec^{-1}(x) \Rightarrow x=\sec(y) \Rightarrow 1=\sec(y)\,tg(y)\,y'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{\sec(y)\,tg(y)} \Rightarrow y'=\frac{1}{x\,tg(y)}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$1+tg^2(y)=\sec^2(y) \Rightarrow \sec^2(y)-1=tg^2(y) \Rightarrow tg(y)=\sqrt{\sec^2(y)-1}$$

$0<y<\frac{\pi}{2}$ یا $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$

به طور خلاصه فرمول های زیر را برای مشتق توابع معکوس مثلثاتی داریم:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(u))=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}(u))=-\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(u))=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}(u))=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(tg^{-1}(u))=\frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}(u))=-\frac{u'}{1+u^2}$$

نکته:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow 1=y'f'(y)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

مثال: مطلوبست مشتق تابع $y=Ln(x)$

$$y'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad y=Ln(x) \Rightarrow x=e^y$$

$$=\frac{1}{e^{Ln(x)}}=\frac{1}{x}$$

به همین ترتیب برای $y = \log_b^x$ داریم:

$$y = \log_b^x \Rightarrow x = b^y \Rightarrow 1 = y' b^y \ln(b)$$

$$y' = \frac{1}{b^y \ln(b)} = \frac{1}{x \ln(b)}$$

★ $\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{u'}{u}$

★ $\frac{d}{dx}(\log_b^u) = \frac{u'}{u \ln(b)}$

مثال: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

① $y = \ln(\sin(x))$

$$y' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$$

② $y = \sqrt{\ln(x)} = \ln(x)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

③ $y = \log_{10}\{2 + \sin(x)\}$

$$y' = \frac{\cos(x)}{(2+\sin(x))\ln(10)}$$

④ $y = \ln|x|$

$$y = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{-1}{-x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

⑤ $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

$$y' = \frac{-e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x}}{e^{-x} + xe^{-x}} = \frac{-xe^{-x}}{e^{-x}(1+x)} = -\frac{x}{1+x}$$

مشتق گیری لگاریتمی :

محاسبه مشتق توابع پیچیده شامل ضرب، تقسیم و توان گاهی با گرفتن لگاریتم ساده‌تر می‌شود.
این روش را مشتق گیری لگاریتمی می‌نامند.

مثال : مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$*\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)*$

$*\ln(a^b) = b\ln(a)*$

① $y = \dfrac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

$\ln(y) = \ln(x)^{\frac{3}{4}} + \ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln(3x+2)^5$

$\ln(y) = \frac{3}{4}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - 5\frac{3}{3x+2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$

② $y = x^{\sqrt{x}}$ (مهم)

$\ln(y) = \ln(x^{\sqrt{x}}) \Rightarrow \ln(y) = \ln(x^{\sqrt{x}})$

$\ln(y) = \sqrt{x}\ln(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}$

$y' = y\left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln(x)}{2\sqrt{x}}\right)$

③ $x^y = y^x \Rightarrow \underbrace{x^y - y^x}_{f} = 0 \Rightarrow y\ln(x) = x\ln(y) \Rightarrow y'\ln(x) + \frac{y}{x} = \ln(y) + \frac{xy'}{y}$

$\left(\ln(x) - \frac{x}{y}\right)y' = \ln(y) - \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{\ln(y) - \frac{y}{x}}{\ln(x) - \frac{x}{y}}$

④ $y = x^{\sin(x)} \Rightarrow \ln(y) = \sin(x)\ln(x)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)$$

$$\Rightarrow y' = y\left(\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)\right) = x^{\sin(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)\right)$$

⑤ $y = (x^2+2)^2(x^4+4)^4$

$$\ln(y) = \ln(x^2+2)^2 + \ln(x^4+4)^4$$

$$\Rightarrow \ln(y) = 2\ln(x^2+2) + 4\ln(x^4+4)$$

$$\frac{y'}{y} = 2\,\frac{2x}{x^2+2} + 4\,\frac{4x^3}{x^4+4} \Rightarrow y' = y\left(\frac{4x}{x^2+2} + \frac{16x^3}{x^4+4}\right)$$

$$\Rightarrow y' = (x^2+2)^2(x^4+4)^4\left(\frac{4x}{x^2+2} + \frac{16x^3}{x^4+4}\right)$$

مشتق توابع پارامتری :

اگر خم C به کمک معادلات $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ مشخص شود، چنین $x(t)$ و $y(t)$ هر دو مشتق پذیر باشند و $x'(t) \neq 0$ باشد در اینصورت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (1)$$

مثال: اگر $\begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\mathrm{tg}(t)$$

تذکر: برای یافتن مشتقات مراتب بالاتر می‌توان فرمول بالا را تکرار کرد

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال: اگر $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\frac{1}{4}(t^2-4) \end{cases}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطه $(2,3)$ محاسبه کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=t^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{d}{dt}x}=\frac{\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]}{\frac{d}{dt}\sqrt{t}}=\frac{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=3t$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)}=\left.t^{\frac{3}{2}}\right|_{t=4}=4^{\frac{3}{2}}=8 \qquad x=2\Rightarrow t=4$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(2,3)}=\left.3t\right|_{t=4}=12$$

تذکر: $y''=\dfrac{x'y''-x''y'}{(x')^3}$

مثال: مشتق توابع پارامتری زیر را بیابید.

① $\begin{cases} x=a(t-\sin(t)) \\ y=a(1-\cos(t)) \end{cases}$

$$x'=a(1-\cos(t)),\quad y'=a\sin(t)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{a\sin(t)}{a(1-\cos(t))}$$

$$=\frac{2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}=\cot(\frac{t}{2}) \qquad t\neq 2k\pi$$

---

② $\begin{cases} x=2\ln(\cot(t)) \\ y=\tan(t)+\cot(t) \end{cases}$ $\qquad x'=-2\dfrac{\csc^2(t)}{\cot(t)}$

$$y'=\sec^2(t)-\csc^2(t)$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2(t)-\csc^2(t)}{\frac{\csc^2(t)}{\cot(t)}}=\frac{\cot(t)(\sec^2(t)-\csc^2(t))}{\csc^2(t)}$$

$$=\cot\left(\frac{\sec^2(t)}{\csc^2(t)}\right)-\cot(t)=\cot\left(\frac{\frac{1}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\sin^2(t)}}\right)-\cot(t)$$

$$=\cot(t)\,tg^2(t)-\cot(t)=tg(t)-\cot(t)$$