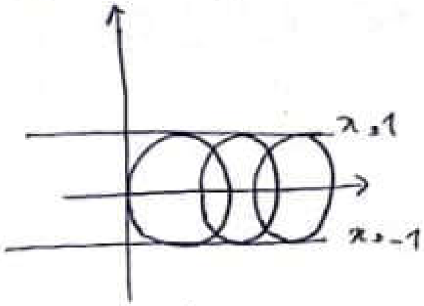
تعریف :

منظور از پوش دسته منحنی های $\Phi(x,y,c)$ منحنی یا منحنی هایی است که بر تمام منحنی ها (و بر هر کدام فقط در یک نقطه) مماس می شود.

به عنوان مثال دسته منحنی های $(x-c)^2+y^2=1$ را در نظر بگیرید:

با توجه به شکل زیر خطوط $x=+1$ و $x=-1$ پوش این دسته منحنی ها می باشند



برای بدست آوردن پوش دسته منحنی های $\Phi(x,y,c)=0$ کافیست پارامتر c را بین معادله Φ و مشتق این معادله نسبت به c حذف کنیم.

مثال : پوش دسته منحنی های زیر را بیابید:

الف) $(x-c)^2+y^2=1$

$$\begin{cases} (x-c)^2+y^2=1 & (1) \\ -2(x-c)=0 \Rightarrow x=c & (2) \end{cases}$$

با جایگذاری (2) در (1) داریم

$$(c-c)^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

ب) $y=ce^x+\frac{1}{c}$

$$\begin{cases} y=ce^x+\frac{1}{c} & (1) \\ 0=e^x-\frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2}=e^x \Rightarrow \frac{1}{c}=e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow c=e^{-\frac{x}{2}} & (2) \end{cases}$$

با جایگذاری (2) در (1) داریم:

$$y=e^{-\frac{x}{2}}e^x+e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y=2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y^2=4e^x$$

ج) $3x = \frac{y^3}{c} - c$

$$\begin{cases} 3x = \frac{y^3}{c} - c & (1) \\ 0 = -\frac{y^3}{c^2} - 1 \Rightarrow \frac{y^3}{c^2} = -1 \Rightarrow c^2 = -y^3 & (2) \end{cases}$$

از (1) و (2) داریم:

$$3x = -\frac{c^2}{c} - c = -2c \Rightarrow 9x^2 = 4c^2 \Rightarrow 9x^2 = -4y^3$$

د) $y = (x-c)^2$

$$\begin{cases} y = (x-c)^2 & (1) \\ 0 = -2(x-c) \Rightarrow x = c & (2) \end{cases}$$

از (1) و (2) داریم:

$$y = 0$$

هـ) $y = cx - \frac{1}{c}$

$$\begin{cases} y = cx - \frac{1}{c} & (1) \\ 0 = x + \frac{1}{c^2} \Rightarrow x = -\frac{1}{c^2} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} y = -\frac{1}{c^2}c - \frac{1}{c} = -\frac{2}{c} \Rightarrow y^2 = \frac{4}{c^2} = -4x$$

نکته:
اگر دسته منحنی $\Phi(x,y,c)=0$ جواب معادله دیفرانسیل $F(x,y,y')=0$ باشد، پوش آن نیز جواب معادله است و چون به ازای هیچ مقداری از پارامتر c بدست نمی‌آید جواب غیرعادی (تکین) معادله می‌باشد.

تذکر:
ممکن است با حذف c از دستگاه ذکرشده پوش به دست نیاید و یا فقط بخشی از آن بدست آید با توجه به اینکه پوش منحنی همان جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل نظیر است، لذا باید در معادله دیفرانسیل صدق کند.

معادله دیفرانسیل کلرو:

فرم کلی معادله دیفرانسیل کلرو بصورت $y=xy'+f(y')$ می‌باشد. با توجه به اینکه این معادله برحسب y نوشته شده است، می‌توانیم از حالت سوم استفاده کرد و قرار دهیم $y'=p$ و سپس مسأله را حل نماییم:

$$y'=p \Rightarrow \frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dy=p\,dx$$

$$y=xp+f(p) \Rightarrow dy=p\,dx+(x+f'(p))\,dp$$

$$\Rightarrow p\,dx=p\,dx+(x+f'(p))\,dp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+f'(p)=0 \\ dp=0 \quad \Rightarrow p=c \end{cases} \Rightarrow y=cx+f(c)$$

لذا بطور خلاصه جواب عمومی معادله دیفرانسیل کلرو، با جایگذاری $y'=c$ در معادله بدست می‌آید

همچنین جواب غیرعادی این مسئله با حذف c از جواب عمومی آن بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=cx+f(c) \\ 0=x+f'(c) \end{cases}$$

مثال: جواب عمومی و غیرعادی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

① $y=xy'+\sqrt{y'}$

$$y=cx+\sqrt{c}$$

$$\begin{cases} y=cx+\sqrt{c} \\ 0=x+\dfrac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \sqrt{c}=-\dfrac{1}{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=c\left(-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{4x}$$

② $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$ $\qquad\qquad y = cx - \frac{c^2}{4}$

$$\begin{cases} y = cx - \frac{c^2}{4} \\ 0 = x - \frac{c}{2} \Rightarrow x = \frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} \Rightarrow y = x^2$$

---

③ $y = xy' - y'^3$ $\qquad\qquad y = cx - c^3$

$$\begin{cases} y = cx - c^3 \\ 0 = x - 3c^2 \Rightarrow x = 3c^2 \end{cases} \Rightarrow y = 3c^3 - c^3 = 2c^3 \Rightarrow y^2 = 4c^6$$

$$\Rightarrow 27y^2 = 4x^3$$

---

④ $x = \frac{y}{y'} + \ln(y')$

$\Rightarrow x = yx' + \ln\left(\frac{1}{x'}\right)$

کلرو نسبت به تابع x متغیر مستقل y.

$x = cy + Ln\left(\frac{1}{c}\right) = cy - Ln(c)$

$$\begin{cases} x = cy - Ln(c) \\ 0 = y - \frac{1}{c} \Rightarrow y = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{y} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1 - Ln\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow x = 1 + Ln(y) \qquad \Rightarrow y = e^{x-1}$

معادله دیفرانسیل لاگرانژ:

هر معادله به شکل زیر معادله لاگرانژ نامیده می شود:

$$y = x f(y') + g(y')$$

برای حل این مسئله مانند حالت سوم، $p = y'$ فرض شده و از طرفین نسبت به x مشتق می گیریم:

$$y = x f(p) + g(p)$$

$$y' = p = f(p) + (x f'(p) + g'(p)) \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = (x f'(p) + g'(p)) \frac{dp}{dx} \qquad (**)$$

اگر به ازای مقدار ثابت $p = p_0$، $p_0 - f(p_0) = 0$ باشد آنگاه دو سمت راست معادله داریم $\frac{dp}{dx} = 0$

لذا $p = p_0$ در طرفین معادله فوق صدق می کند که جوابی از معادله بصورت تابع $y = x f(p_0) + g(p_0)$

حاصل می شود، که جواب غیرعادی معادله است. برای محاسبه جواب عمومی معادله $(**)$ را بصورت زیر

بازنویسی می کنیم:

$$1 = \left(x \frac{f'(p)}{p - f(p)} + \frac{g'(p)}{p - f(p)} \right) \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dp}}_{x'} - \frac{f'(p)}{p - f(p)} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به x و x' است.

با حل این معادله جواب عمومی x برحسب پارامتر p به دست می آید.

مثال: جواب معادله زیر را بیابید.

$$y = x y'^2 + y'^3$$

$$y' = p \Rightarrow y = x p^2 + p^3 \Rightarrow y' = p = p^2 + (2px + 3p^2) \frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = (2px + 3p^2) \frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = 0 \Rightarrow p = 0, 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$ جوابهای تکین

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{2p}{p-p^2}x = \frac{3p^2}{p-p^2} \quad \rightarrow x' - \frac{2}{1-p}x = \frac{3p}{1-p}$$

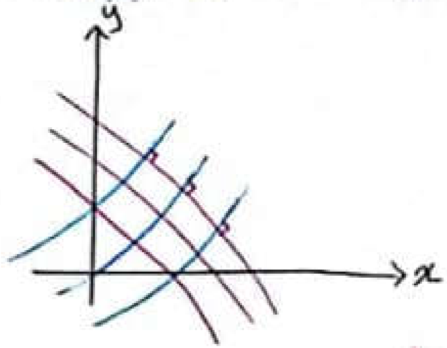
$$\mu(p) = e^{\int \frac{2}{p-1}dp} = e^{2\ln(p-1)} = (p-1)^2$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left[\int \left(\frac{3p}{1-p}\right)(p-1)^2 dp + c\right]$$

$$= \frac{1}{(p-1)^2}\left[\int (-3p^2 + 3p)dp + c\right] = \frac{-p^3 + \frac{3}{2}p^2 + c}{(p-1)^2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-p^3 + \frac{3}{2}p^2 + c}{(p-1)^2} \\ y = \dfrac{-p^5 + \frac{3}{2}p^4 + cp^2}{(p-1)^2} + p^3 \end{cases}$$

مسیرهای متعامد: هرگاه دو دسته منحنی $G(x,y,c)=0$ و $H(x,y,c)$ دارای این خصوصیت باشند که تمام منحنی های یک دسته منحنی بر تمام منحنی های دسته منحنی دیگر عمود باشند، یک دسته را مسیرهای قائم دسته دیگر می نویسیم.



طریقه بدست آوردن مسیرهای قائم یک خانواده منحنی:

برای بدست آوردن مسیرهای قائم برخانواده منحنی $G(x,y,c)=0$ ، ابتدا معادله دیفرانسیل متناظر با این دسته منحنی ها را بدست می آوریم، سپس به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می دهیم و معادله دیفرانسیل بدست آمده را حل می نماییم. جواب عمومی معادله دیفرانسیل اخیر، مسیرهای قائم بر دسته منحنی $G(x,y,c)=0$ است.

مثال: مسیرهای قائم بر دسته منحنی های زیر را بیابید.

① $y=ax^2$

حل: $y=ax^2 \Rightarrow y'=2ax$

با تقسیم y بر y' ، a را حذف کرده و معادله دیفرانسیل نظیر این دسته منحنی را بدست می آوریم:

$$\frac{y}{y'}=\frac{ax^2}{2ax} \Rightarrow \frac{y}{y'}=\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{2}{x}$$

حال به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می دهیم:

$$-\frac{1}{yy'}=\frac{2}{x} \Rightarrow -yy'=\frac{x}{2} \Rightarrow -2y\,dy=x\,dx$$

$$\Rightarrow -y^2=\frac{x^2}{2}+c$$

② $x^2+y^2=c^2$

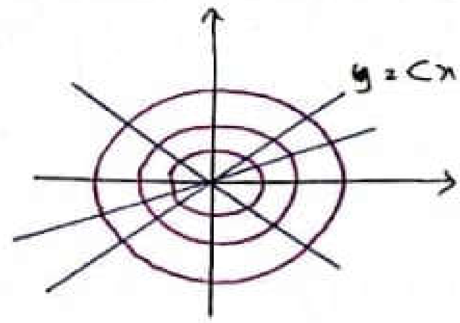
حل: $2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$

با قرار دادن $-\frac{1}{y'}$ به جای y' داریم:

$$-\frac{1}{y'}=-\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + c$$

$$y = cx$$



③ $x^3y - xy^3 = c$

حل: $3x^2y + x^3y' - y^3 - 3xy^2y' = 0$

$$(x^3 - 3xy^2)y' = y^3 - 3x^2y \Rightarrow y' = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}$$

با قرار دادن $-\frac{1}{y'}$ به جای y' داریم:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}$$

$$-(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$$

$$\underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{M}dx + \underbrace{(y^3 - 3x^2y)}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -6xy$$

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ معادله دیفرانسیل فوق کامل است:

$$\Phi(x,y) = \int M\,dx = \int (x^3 - 3xy^2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2y^2}{2} + g(y)$$

$$\Phi(x,y) = \int N\,dy = \int (y^3 - 3x^2y)dy = \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + h(x)$$

$$\Phi(x,y) = \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 = c$$

$$\frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 = c$$