④ $x^2 - y^2 - 2x + 4 = c$

حل: $2x - 2yy' - 2 = 0 \Rightarrow 2(x-1) = 2yy'$

$\Rightarrow y' = \frac{x-1}{y}$

با قرار دادن $-\frac{1}{y}$، به جای y' داریم:

$-\frac{1}{y'} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow -\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow -\ln(x-1) = \ln(y) + c$

$\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) - \ln(y) = c \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{y(x-1)}\right) = c \Rightarrow \frac{1}{y(x-1)} = c$

فصل دوم:

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر:

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بصورت $f(x, y, y', y'') = 0$ است. برخی از این معادلات قابل تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول هستند. در ادامه به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل تبدیل به مرتبه اول می پردازیم:

حالت اول:

اگر معادله فاقد متغیر وابسته y باشد، در اینصورت معادله بصورت $f(x, y', y'') = 0$ است که به کمک تغییر متغیر، $y' = \frac{dy}{dx} = P$ و $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$

به معادله مرتبه اول کاهش می یابد.

مثال:

① $xy'' - y' = 3x^2$ $\qquad y(-1) = 0 \;,\; y'(-1) = 1$

حل: $x\frac{dP}{dx} - P = 3x^2 \qquad [y'' \to \frac{dP}{x} \;,\; y' \to P]$

$\frac{dP}{dx} - \frac{1}{x}P = 3x \qquad$ [معادله خطی مرتبه اول]

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int q(x) \mu(x) dx + c \right]$$

$$= x \left[\int 3 dx + c \right] = x(3x + c) = 3x^2 + cx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1 x \Rightarrow \quad y = \int 3x^2 + c_1 x$$

$$\Rightarrow y = x^3 + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 = x^3 + c_1 x^2 + c_2$$

$$y(-1) = 0 \Rightarrow -1 + c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(-1) = 1 \Rightarrow 3(-1)^2 + 2c_1(-1) = 1$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 0 \\ -2c_1 = -2 \Rightarrow c_1 = 1 \end{cases} \qquad y = x^3 + x^2$$

② $$2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0$$

حل: با قرار دادن $\frac{dy}{dx} = p$ و $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ داریم:

$$2\frac{dp}{dx} - p^2 + 4 = 0 \Rightarrow 2\frac{dp}{dx} = p^2 - 4 \Rightarrow \frac{2\,dp}{p^2 - 4} = dx$$

$$\xrightarrow{\int} \int \frac{2\,dp}{p^2 - 4} = \int dx$$

$$\int \left(\frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+2} \right) dp = x + c_1$$

$$\frac{2}{(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+2} \qquad A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\ln(p-2)-\frac{1}{2}\ln(p+2)=x+c_0$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p-2}{p+2}\right)=x+c_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{p-2}{p+2}}=c_1 e^{x}$$

$$\frac{p-2}{p+2}=c_1 e^{2x} \Rightarrow p-2=c_1 p e^{2x}+2c_1 e^{2x}$$

$$p-c_1 p e^{2x}=2+2c_1 e^{2x} \Rightarrow p(1-c_1 e^{2x})=2(1+c_1 e^{2x})$$

$$p=\frac{2(1+c_1 e^{2x})}{1-c_1 e^{2x}}=\frac{2(1-c_1 e^{2x}+2c_1 e^{2x})}{1-c_1 e^{2x}}$$

$$\Rightarrow p=2\left(1+\frac{2c_1 e^{2x}}{1-c_1 e^{2x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=2\left(1+\frac{2c_1 e^{2x}}{1-c_1 e^{2x}}\right) \Rightarrow y=2x-2\ln(1-c_1 e^{2x})+c_2$$

حالت دوم : (معادله فاقد x باشد) :

دراینصورت معادله به فرم $f(y, y', y'')$ خواهد بود، دراین حالت نیز از تغییر متغیر $p=\frac{dy}{dx}$ استفاده می کنیم. دراین صورت داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

به کمک این دوجا نشینی معادله دیفرانسیل به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول کاهش پیدا می کند.

مثال :

① $yy''+y'^2=0$

حل : $p=y' \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$

$$y\left(p\frac{dp}{dy}\right)+p^2=0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy}=-p$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{y} \xrightarrow{\int} \ln(P) = -\ln(y) + C.$$

$$\ln(P) + \ln(y) = C \Rightarrow \ln(Py) = C.$$

$$\Rightarrow Py = C \Rightarrow P = \frac{C_1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$$

$$y\,dy = c\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$$

② $y'' = (y')^3 + y'$

حل: $y' = P \quad , \quad y'' = P\frac{dP}{dy}$

$$P\frac{dP}{dy} = P^3 + P \Rightarrow \frac{dP}{dy} = P^2 + 1 \Rightarrow \frac{dP}{P^2+1} = dy \Rightarrow \tan^{-1}(P) = y + C_1$$

$$\Rightarrow P = \tan(y + C_1) \qquad \frac{dy}{dx} = \tan(y + C_1)$$

$$\cot(y + C_1)\,dy = dx \Rightarrow \ln(\sin(y + C_1)) = x + C_2$$

$$\sin(y + C_1) = C_2 e^x$$

تمرين: $yy'' - y'^2 = y^2 \ln(y)$

حالت سوم: معادله دیفرانسیل $f(x, y, y', y'')=0$ برحسب y''، y'، y همگن باشد یعنی
$f(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n f(x, y, y', y'')$، در این حالت قرار می‌دهیم $y = e^{\int z(x)dx}$

با مشتق گیری از y داریم: $y' = z e^{\int z(x)dx}$

$$y'' = z' e^{\int z(x)dx} + z^2 e^{\int z(x)dx} = (z^2+z') e^{\int z(x)dx}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله داریم:

$$f(x, e^{\int z(x)dx}, z e^{\int z(x)dx}, (z^2+z') e^{\int z(x)dx}) = f(x, 1, z, z^2+z')$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

بطور خلاصه برای حل این دسته معادلات بجای $y \to 1$، $y' \to z$ و $y'' \to z'+z^2$ قرار گرفته و درنهایت جواب به صورت $y = e^{\int z(x)dx}$ است.

مثال: $x^2 y y'' - (xy' - y)^2 = 0$

حل: این معادله نسبت به y، y'، y'' همگن است:

$$x^2(\lambda y)(\lambda y'') - (x(\lambda y') - \lambda y)^2 = \lambda^2 (x^2 y y'' - (xy' - y)^2)$$

لذا به کمک تغییر متغیر $y = e^{\int z(x)dx}$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$x^2(z^2 + z') - (xz - 1)^2 = 0$$

$$x^2 z^2 + x^2 z' - x^2 z^2 + 2xz - 1 = 0 \Rightarrow x^2 z' + 2xz - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln(x)} = x^2$$ خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow z = \frac{1}{x^2}\left[\int \frac{1}{x^2} \times x^2 + c_1\right] = \frac{1}{x^2}(x + c_1) = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y = e^{\int z(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}} = e^{\ln(x) - \frac{c_1}{x} + c_2'} = c_2\left(x e^{-\frac{c_1}{x}}\right)$$

معادله خطی مرتبه nام:

فرم کلی معادلات خطی مرتبه nام بصورت

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x) \quad (1)$$

اگر $g(x) = 0$، معادله فوق را همگن گویند و در غیر اینصورت معادله را ناهمگن می نامند. یک معادله دیفرانسیل خطی را با ضرایب ثابت گوییم، هرگاه تمام ضرایب $a_i(x)$ در معادله فوق ثابت باشند، در غیر اینصورت معادله را با ضرایب متغیر گوییم.

قضیه: مسأله مقدار اولیه (1) را به همراه n شرط اولیه

$$y(x_0) = c_0 , \ y'(x_0) = c_1 , \dots , \ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

را در نظر بگیرید. اگر $g(x)$ و توابع $a_i(x)$ ، $n \geq i \geq 0$، توابعی پیوسته روی بازه I شامل x_0 باشند و $a_n(x)$ در I مخالف صفر باشد، در این صورت مسئله مقدار اولیه روی بازه I دارای جواب منحصر بفرد است.

جوابهای مستقل خطی:

تعریف: مجموعه توابع $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ را روی بازه $[a, b]$ وابسته خطی گوییم هرگاه ثابت هایی مانند $c_1, c_2, \dots, c_n$ چنان موجود باشد که

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (2)$$

و همه c_i ها برابر صفر نباشند.

مثال:

توابع $\cos(\alpha x)$، $\sin(\alpha x)$ و $\sin(\alpha x+\beta)$ وابسته خطی هستند، زیرا

$$\underbrace{\cos(\beta)}_{c_1}\sin(\alpha x)+\underbrace{\sin(\beta)}_{c_1}\cos(\alpha x)\underbrace{-1}_{c_1}\times\sin(\alpha x+\beta)=0$$

تذکر: توجه کنید که $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ همیشه در معادله (2) صدق می‌کند.

تعریف: مجموعه توابع $\{y_1(x),\dots,y_n(x)\}$ را مستقل خطی گوییم هرگاه، وابسته خطی نباشند، به عبارت دیگر معادله (2) جز جواب بدیهی $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ جواب دیگری نداشته باشد.

قضیه:

معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n ام زیر را درنظر بگیرید:

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y=0$$

و فرض کنید $a_i(x)$، $0\leq i\leq n$، همگی توابعی پیوسته و $a_n(x)\neq 0$ باشد، در اینصورت معادله خطی همگن مرتبه n ام فوق دارای n جواب مستقل خطی است. اگر $y_1(x)$، $y_2(x)$، …، $y_n(x)$ جوابهای مستقل خطی این معادله باشند، در اینصورت جواب عمومی معادله فوق بصورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)}$$

امیرحسین سبحانی

رونسکین:

رونسکین مجموعه توابع $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ روی بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر رونسکین n تابع تعریف شده روی بازه $[a,b]$ حداقل در یک نقطه از این بازه مخالف صفر باشد، درانصورت توابع $f_1, \ldots, f_n$ مستقل خطی هستند. اگر رونسکین روی $[a,b]$ برابر صفر باشد و $f_1, \ldots, f_n$ جوابهای معادله دیفرانسیل خاصی باشند، درانصورت این توابع وابسته خطی هستند.

توجه: اگر رونسکین $f_1, \ldots, f_n$ روی $[a,b]$ متحد صفر باشد ولی $f_1, \ldots, f_n$ جواب یک معادله دیفرانسیل مشابه نباشند، قضیه فوق چیزی درمورد وابستگی خطی $f_1, \ldots, f_n$ نمی گوید.

مثال: برای توابع $\sin(x)$ ، $\cos(x)$ داریم:

$$W(\sin(x), \cos(x)) = \begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

مستقل خطی

مثال: آیا توابع e^x و e^{2x} وابسته خطی هستند.

$$W(e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

لذا مستقل خطی هستند

قضیه:

فرض کنید y_g جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ باشد، y_p جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$ باشد، دراینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$$

به صورت

$$y_G = y_g + y_p$$

خواهد بود.

قضیه:

فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب از معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \qquad (\star)$$

باشد دراینصورت رونسکین این دو جواب یا همواره صفراست و یا همواره ناصفراست و داریم:

$$w(y_1, y_2) = C e^{-\int p(x) dx}$$

حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم:

۱) روش کاهش مرتبه: برای حل معادله دیفرانسیل $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$

فرض کنید y_1 یک جواب از معادله دیفرانسیل داده شده باشد، آنگاه برای تعیین جواب عمومی این معادله نیاز به جوابی از این معادله مانند y_2 داریم که با y_1 مستقل خطی باشد. جهت تعیین y_2 قرار می‌دهیم $y_2 = v(x) y_1$ که در آن $v(x)$ غیر ثابت است. حال با جایگذاری y_2 در معادله دیفرانسیل $(\star)$ مرتبه معادله یک درجه کاهش یافته و $v(x)$ از طریق فرمول زیر که به فرمول آبل معروف است محاسبه می‌شود.

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$

مثال: جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید:

① $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ ، $y_1 = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

حل: $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - 1/4}{x^2}y = 0$

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{x}{\sin^2(x)} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx$$

$$= \int \frac{x}{\sin^2(x)} \times \frac{1}{x} dx = \int \csc^2(x) dx = -\cot(x)$$

$$\Rightarrow y_2 = v(x) y_1 = -\cot(x) \times \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = -\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y_g = c_1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

② $xy'' + 2y' + xy = 0$ ، $y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

حل: ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} = \int \frac{x^2}{\sin^2(x)} e^{\int \frac{-2}{x}dx} dx$$

$$= \int \frac{x^2}{\sin^2(x)} \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \int \csc^2(x) = -\cot(x)$$

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = -\cot(x) \frac{\sin(x)}{x} = \frac{-\cos(x)}{x}$$

$$y_g = c_1 \frac{\sin(x)}{x} + c_2 \frac{\cos(x)}{x}$$

③ $(1-x)^2 y'' - 4(1-x)y' + 2y = 0$, $y_1 = \frac{1}{1-x}$

حل: $y'' - \frac{4}{1-x} y' + \frac{2}{(1-x)^2} y = 0$

$$V(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int (1-x)^2 e^{-4\ln(1-x)} dx$$

$$= \int (1-x)^2 (1-x)^{-4} dx = \int (1-x)^{-2} dx$$

$u = 1-x$
$du = -dx$

$$= \int -u^{-2} du = -(-1)u^{-1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow y_2 = V(x) y_1 = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow y_g = \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{(1-x)^2}$$

۹۹,۱,۲۴ امیرحسین سبحانی