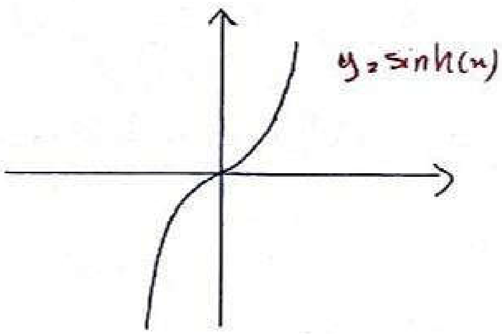
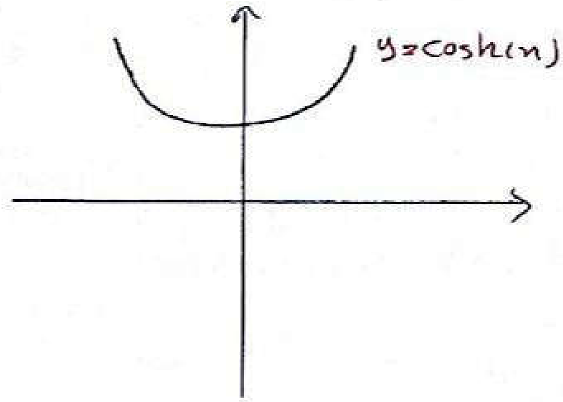
توابع هذلولی:

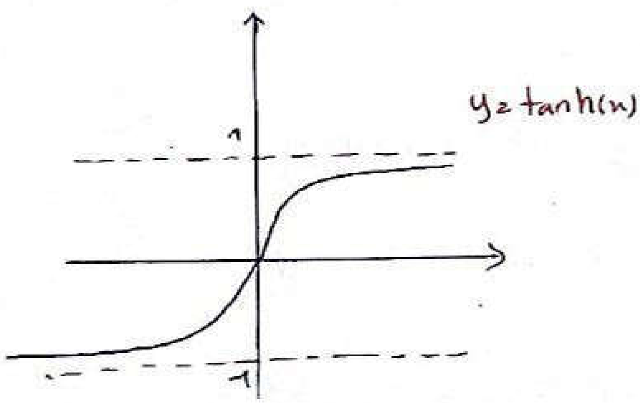
$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

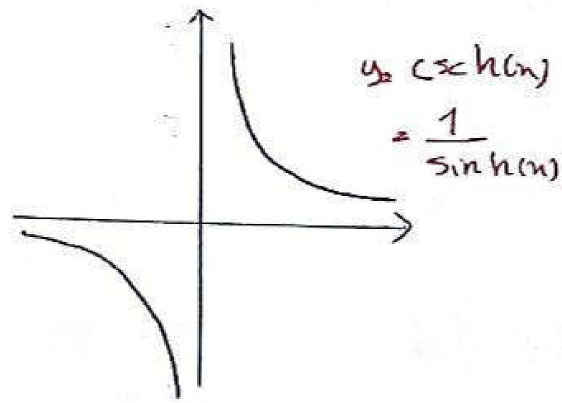
$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

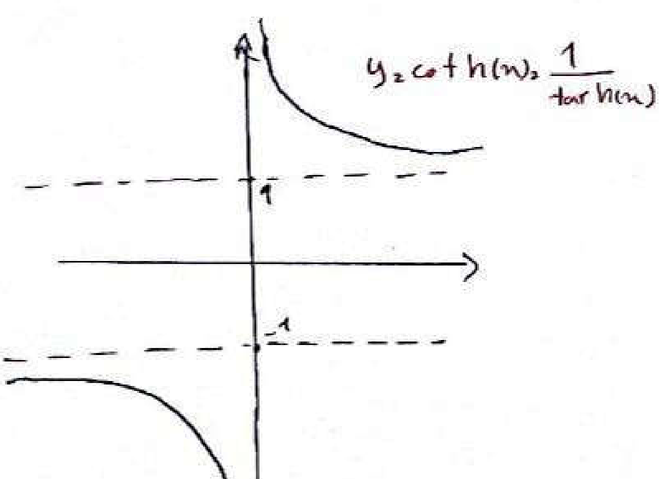
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

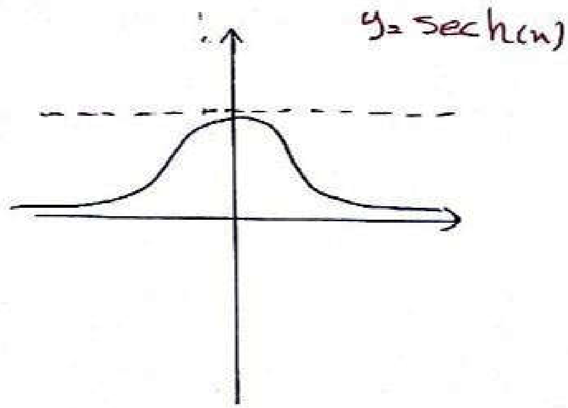












بسیاری از اتحادهای مثلثاتی، اتحادهای نظیر اتحادهای هذلولوی دارند به عنوان مثال:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

در ادامه به بیان برخی از اتحادهای مهم هذلولوی می پردازیم.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$$

$$\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2} \qquad \sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

مشتق توابع هذلولوی: مشتق توابع هذلولوی به سادگی به کمک تعریف این توابع بدست می‌آید.

① $$\frac{d}{dx}[\sinh(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = \cosh(x)$$

② $$\frac{d}{dx}[\cosh(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) = \sinh(x)$$

③ $$\frac{d}{dx}[\tanh(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right] = \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x)-\sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^{2}(x)}$$

$$= \frac{\cosh^{2}(x)-\sinh^{2}(x)}{\cosh^{2}(x)} = \frac{1}{\cosh^{2}(x)} = \operatorname{sech}^{2}(x)$$

به همین ترتیب مشتق سایر توابع هذلولوی قابل محاسبه است.

$$\frac{d}{dx}[\sinh(u)] = u'\cosh(u)$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh(u)] = u'\sinh(u)$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh(u)] = u'\operatorname{sech}^{2}(u)$$

$$\frac{d}{dx}[\coth(u)] = -u'\operatorname{csch}^{2}(u)$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}(u)] = -u'\operatorname{sech}(u)\tanh(u)$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(u)] = -u'\operatorname{csch}(u)\coth(u)$$

توابع معکوس هذلولوی :

① $\sinh^{-1}(x)$:

$$y = \sinh^{-1}(x) \Rightarrow x = \sinh(y) \Rightarrow x = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^{y} - e^{-y}$$

با ضرب طرفین در e^{y} داریم :

$$2xe^{y} = e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

$$e^{y} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

اما چون $e^{y} > 0$ ، بنابراین :

$$\Rightarrow e^{y} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

به همین ترتیب می توان روابط مربوط به توابع معکوس هذلولوی را استخراج کرد :

② $y = \tanh^{-1}(x)$:

$$x = \tanh(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \qquad -1 < x < 1$$

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\Rightarrow 2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

به طور خلاصه روابط مربوط به توابع معکوس هذلولوی در زیر ارائه شده است .

1) $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $\qquad D = (-\infty, \infty)$

2) $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\qquad D = [1, \infty)$

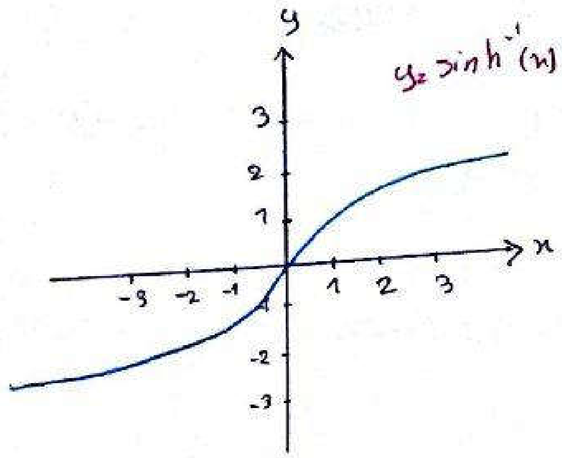
3) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$ $\qquad D = (-1, 1)$

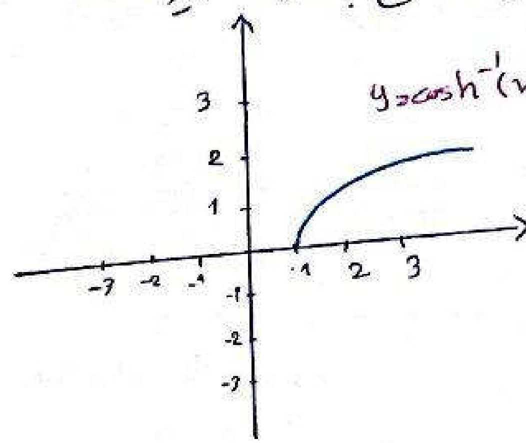
4) $\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$ $\qquad D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

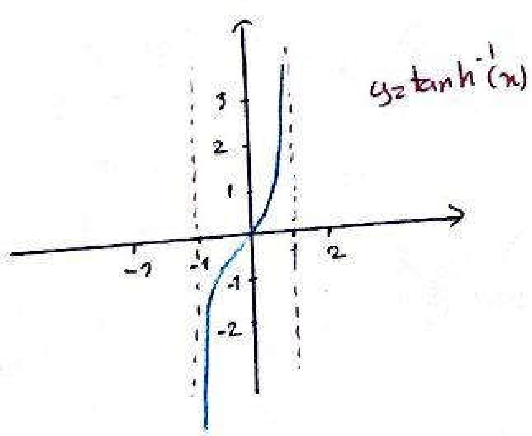
5) $\operatorname{sech}^{-1}(x) = \operatorname{Ln} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\qquad D = (0, 1]$

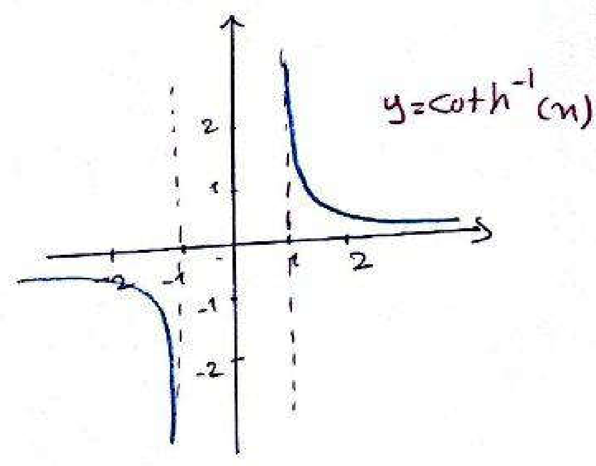
6) $\operatorname{csch}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$ $\qquad D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

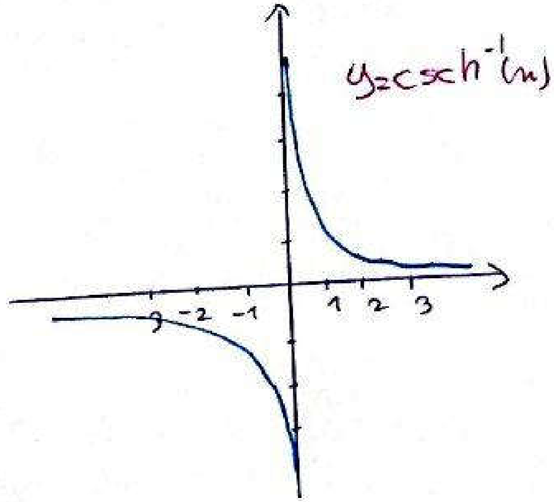
نمودار این توابع به صورت زیر است :

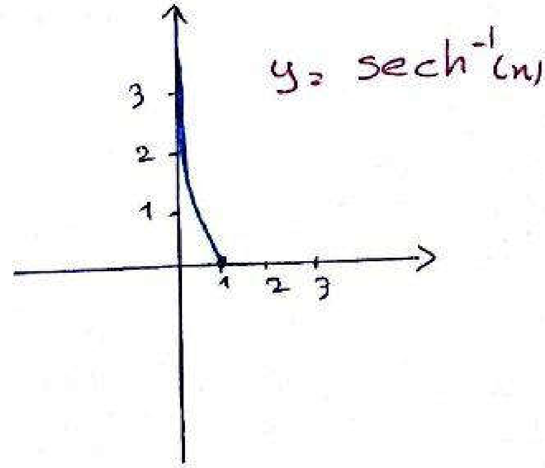












مشتق توابع معکوس هذلولوی: برای محاسبه مشتق توابع معکوس هذلولوی از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

مثال: مشتق $y = \sinh^{-1}(x)$ را محاسبه کنید:

$$y = \sinh^{-1}(x) \Rightarrow x = \sinh(y) \Rightarrow 1 = y' \cosh(y)$$

چون $y \geq 0$:

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

تذکر: می‌توانستیم به طور مستقیم از فرمول های ارائه‌شده نیز استفاده کنیم:

$$\frac{d}{dx}\left[\sinh^{-1}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

به طور خلاصه فرمول های زیر را برای محاسبه مشتق توابع معکوس هذلولوی داریم :

① $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

② $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

③ $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}(x)) = \frac{1}{1-x^2}$

④ $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}(x)) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

⑤ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

⑥ $\frac{d}{dx}(\coth^{-1}(x)) = \frac{1}{1-x^2}$

۹۹,۱,۲۵ امیرحسین سلطانی