قاعده هوپیتال :

$\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$

از قاعده هوپیتال جهت رفع ابهام حدود مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ استفاده می کنیم.

قضیه اول هوپیتال :

فرض کنید f و g توابعی مشتق پذیر در بازه (a,b) باشند و $g'(x)\neq 0$. همچنین فرض کنید:

$$i)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$$

$$ii)\ \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$ (که در آن L عدد متناهی یا ∞ یا $-\infty$ است)

در اینصورت :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

این قضیه با عوض شدن $\lim_{x\to a^+}$ با $\lim_{x\to b^-}$ یا حتی $\lim_{x\to c}$ که در آن $a<c<b$ نیز برقرار است. همچنین a می تواند $-\infty$ و b می تواند ∞ باشد.

مثال : حدود زیر را محاسبه نمایید:

① $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ مبهم $\frac{0}{0}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

② $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ مبهم $\frac{0}{0}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{2e^x-2-2x-x^2}$ مبهم $\frac{0}{0}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2\cos(2x)}{2e^x-2-2x} \overset{\frac{0}{0}\,H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)+2\sin(2x)}{e^x-1} \overset{\frac{0}{0}\,H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)+4\cos(2x)}{e^x} = \frac{-1+4}{1} = 3$$

④ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos^2(x)}$ $\qquad \frac{0}{0}$ $\qquad$ مبهم

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-2\sin(x)\cos(x)} = -\infty$$

⑤ $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$

در برخی مواقع از قاعده هوپیتال می توان برای رفع ابهام $\infty-\infty$ نیز کمک گرفت :

⑥ $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$ $\qquad \infty-\infty$ $\qquad$ مبهم

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \overset{\frac{0}{0}\,H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)-x\sin(x)}$$

$$= -\frac{0}{2} = 0$$

⑦ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ $\qquad \frac{0}{0}$ $\qquad$ مبهم

$$\overset{H}{=} \lim \frac{\cos(x)-1}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}$$

قضیه دوم هوپیتال :

فرض کنید f و g توابعی مشتق پذیر روی بازه (a,b) باشند و $g'(x)$ روی این بازه صفر نباشد

همچنین فرض کنید :

$$i)\ \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$$

$$ii)\ \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$ (که در آن L عدد متناهی ∞ یا $-\infty$ باشد)

در اینصورت

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L}$$

این قضیه با عوض شدن $\lim\limits_{x\to a^+}$ با $\lim\limits_{x\to b^-}$ و یا $\lim\limits_{x\to c}$ که $a<c<b$ نیز برقرار است.

همچنین a می تواند $-\infty$ و b می تواند ∞ باشد.

از قضیه فوق برای رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ استفاده می شود.

مثال : حدود زیر را محاسبه نمایید:

① $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

② $$\lim_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{Ln}(x)$$ [مبهم حد $0\times\infty$]

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{Ln}(x) = 0\times\infty$$ مبهم

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\,H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

③ $\lim_{x\to 0} \tan(2x)\csc(4x)$ $\qquad 0\times\infty$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin(4x)} \overset{\frac{0}{0}H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(2x)}{4\cos(4x)} = \frac{1}{2}$$

④ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec^2(x)}{\sec^2(3x)}$ $\qquad \frac{\infty}{\infty}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2\sec(x)\sec(x)\,tg(x)}{6\sec(3x)\sec(3x)\,tg(3x)} = \frac{\infty}{\infty}$$ بی فایده

اما با بازنویسی داریم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2(3x)}{\cos^2(x)} \overset{\frac{0}{0}H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-6\cos(3x)\sin(3x)}{-2\cos(x)\sin(x)}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3(2\cos(3x)\sin(3x))}{2\cos(x)\sin(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3\sin(6x)}{\sin(2x)} \overset{\frac{0}{0}H}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{18\cos(6x)}{2\cos(2x)}$$

$$= 9$$

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)}$ $\qquad \frac{-\infty}{\infty}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \sin(x) = -1\times 0 = 0$$

همانطور که قبلاً دیدیم گاهی صورت $\infty-\infty$ را می‌توان به یکی از صور $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآورد و سپس از قاعده هوپیتال جهت رفع ابهام استفاده کرد.

(6) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{Ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right) \qquad \infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-Ln(x)}{(x-1)\,Ln(x)} \overset{\frac{0}{0}\,H}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{Ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}}$$

[باضرب صورت و مخرج در x]

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1+x\,Ln(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+x\times\frac{1}{x}+Ln(x)}=\frac{1}{2}$$

تمرین:

(7) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2(x)\right)$$

(8) $$\lim_{x\to\infty}\left(x-Ln^3(x)\right) \qquad \infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left(1-\overset{\star}{\frac{Ln^3(x)}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty} x(1-0)=\infty$$

$$\star\ \lim_{x\to\infty}\frac{Ln^3(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\,H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3\,Ln^2(x)\,\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}3\,\frac{Ln^2(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}3\,\frac{2Ln(x)\,\frac{1}{x}}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}6\,\frac{Ln(x)}{x} \overset{H}{=} 6\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

صور مبهم نمایی:

صور مبهم 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞ را صور مبهم نمایی می‌گویند. ساده‌ترین راه جهت رفع ابهام از صور مبهم نمایی، گرفتن لگاریتم از عبارت تحت حد است. به مثال زیر دقت کنید:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0 \qquad \text{مبهم}$$

حال قرار می‌دهیم $y = x^x$ لذا داریم: $\ln(y) = \ln(x^x) = x\ln(x)$ حال $\lim_{x\to 0^+} \ln(y)$ را محاسبه می‌نماییم:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \times -\infty \qquad \text{مبهم}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

اما از آنجا که $y = e^{\ln(y)}$ لذا

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln(y)} = e^0 = 1$$

در حالت کلی اگر جهت محاسبه حد $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ به صور مبهم نمایی برخوردیم ابتدا

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))$$

را محاسبه می‌کنیم. که صورت مبهم $0\times\infty$ است. درنهایت

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))}$$

مثال:

1) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^x \qquad 1^\infty \qquad$ مبهم $\qquad y = \left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln(y) = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right) \overset{\infty\times 0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sin(\frac{3}{x})}\left(-\frac{3}{x^2}\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(1+\sin\left(\tfrac{3}{x}\right)\right)^x = e^3$$

② $\lim_{x\to 0^+} (x+1)^{\cot(x)}$ $\quad 1^\infty$ مبهم $\quad y=(x+1)^{\cot(x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} \cot(x)\ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{tg(x)}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2(x)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^1 = e$$

③ $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$ $\quad \infty^0$ مبهم $\quad y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(y) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \times \cot(x) = 1\times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$