

## دانشگاه علم و صنعت ایران

## دانشکده ریاضی

سوالات امتحانی ریاضی 1 در میان ترم  
(ترم اول 1387)

سؤال اول . (الف) مطلوب است محاسبه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n}$  که در آن  $p > 0$  .

(ب) . مطلوب است محاسبه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right)$

سؤال ~~دو~~ <sup>چهارم</sup> زیر را حساب کنید :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 \sqrt{x})^{2x}$$

سؤال سوم . تابع  $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$  مفروض است .  $\frac{dx}{dy}$  را بر حسب  $x$  حساب کنید و سپس با

$$\text{محاسبه } \frac{dy}{dx} \text{ نشان دهید } \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

سؤال چهارم . ثابت کنید

$$(a) \cos x = \cosh(ix)$$

$$(b) \sin x = \frac{1}{i} \sinh(ix)$$

$$\text{سپس نشان دهید } \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

سؤال پنجم . قضیه مقدار میانگین (یا قضیه لاگرانژ) را بیان کرده و ثابت کنید . سپس از آن استفاده کرده درستی نا مساوی زیر را نتیجه بگیرید

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (b > a)$$

موفق باشید

بسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

---

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۱-ترم اول سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱

---

۱-هریک از حدود زیر را به دست آورید

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg}(2x) + \operatorname{arctg}(3x) - \frac{3\pi}{4}}{x-1} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg}x}{\ln(1 + \frac{1}{x})} \quad (\text{ب})$$

۲- فرض کنید  $a_1 = 3$  و  $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$  برای  $n \geq 1$ . نشان دهید دنباله  $\{a_n\}$  همگرا است و حد آن را بیابید.

۳- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{گویا} \\ 2x + 3 & \text{گنگ} \end{cases}$  را در نظر بگیرید و وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقاط مختلف اعداد حقیقی بررسی کنید.

۴- فرض کنید تابع حقیقی  $f$  روی  $[0, 1]$  مشتق پذیر و  $f(0) = 0$  و  $f(x) > 0$  برای هر  $x$  در  $(0, 1)$ . نشان دهید عدد حقیقی  $c$  در  $(0, 1)$  موجود است که

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

۵-الف) فرض کنید  $a, b$  دو عدد مختلط باشند. ثابت کنید  $|a - b| = |1 - \bar{a}b|$  اگر و فقط اگر  $|a| = 1$  یا  $|b| = 1$ .

ب) ریشه های معادله  $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$  را در اعداد مختلط به دست آورید.

موفق باشید



دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

سوالات امتحانی درس ریاضی عمومی (۱)

(میان ترم)

نیمسال اول ۹۳-۱۳۹۲

تاریخ امتحان:

۱۳۹۲/۸/۳۰

رشته های فنی و مهندسی و فیزیک

مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

برگه سوالات عمدتاً داده شده.

۱. مطلوب است محاسبه یکی از دو مورد زیر:

$$\frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}} \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}} \quad (\text{ب})$$

۲. اگر  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}$  و  $0 < a < x_1 < b$ ، ثابت کنید دنباله  $\{x_n\}$  دارای حد است و سپس حد آن را بیابید.

۳. ثابت کنید که اگر  $0 < a < b$  نامساوی های زیر برقرارند:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^a < e^{b-a} < \left(\frac{b}{a}\right)^b$$

سپس با استفاده از آن نتیجه بگیرید

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad x > 0.$$

۴. مطلوب است محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cosh x) + \ln(\cos x)}{\cos(\sin x) - \cos x} \quad (\text{ب}) \quad (\text{با استفاده از بسط توابع})$$

۵. اتومبیلی با آهنگ (سرعت) ۳۰ متر بر ثانیه به تقاطع دو جاده نزدیک می شود. وقتی اتومبیل ۱۲۰ متر با تقاطع فاصله دارد، یک کامیون با سرعت ۴۰ متر بر ثانیه از تقاطع می گذرد. اگر اتومبیل و کامیون در جاده های متعامد در حرکت باشند، وقتی که ۲ ثانیه از زمان عبور کامیون گذشته باشد، اتومبیل و کامیون با چه سرعتی از یکدیگر فاصله می گیرند؟

موفق باشید



دانشگاه سمنان  
دانشکده ریاضی

بسمه تعالی

آزمون میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱

تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۸/۲۲

رشته‌های فنی مهندسی  
مدت زمان پاسخ‌گویی: ۱۰۰ دقیقه

توجه: درک سوال جزء امتحان می باشد لطفا سوال نفرمایید.

۱. با توجه به اینکه  $1+2i$  ریشه‌ی معادله‌ی  $z^5 - 2z^4 + 5z^3 - z^2 + 2z - 5 = 0$  است چهار ریشه‌ی دیگر معادله را بیابید.  
(۱ نمره)

۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط را بیابید که در نامعادله‌ی

$$\operatorname{Im}(iz^2) \leq 1$$

صدق می‌کند.  
(۵/۰ نمره)

۳. در همگرایی دنباله‌ی زیر بحث کنید:  
(۱ نمره)

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

(راهنمایی: می‌توانید از نامساوی  $\ln(1+x) < x$  برای  $x > 0$  استفاده کنید.)

۴. حاصل هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.  
(۵/۱ نمره)

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \cot x)^{\tan x}$       ب)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln^2 x)$

۵. تابع  $f$  چنان است که بر  $[a, b]$  پیوسته بوده و همه جا بر بازه‌ی  $(a, b)$  مشتق دوم دارد. پاره‌خط واصل بین نقاط  $(a, f(a))$  و  $(b, f(b))$ ، نمودار تابع را در نقطه‌ی سومی مانند  $(c, f(c))$  قطع می‌کند که  $c \in (a, b)$ . ثابت کنید نقطه‌ی  $t$  در بازه‌ی  $(a, b)$  وجود دارد که  $f''(t) = 0$  باشد.  
(۱ نمره)

۶. نشان دهید توابع پارامتری  $x(t) = e^t \sin t$  و  $y(t) = e^t \cos t$  که  $t \in [0, 2\pi]$  در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:  
(۱ نمره)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} (x+y)^2 = 2 \left( x \frac{dy}{dx} - y \right)$$

موفق باشید.  
دانشکده ریاضی

بسمه تعالی



رشته های مهندسی، فیزیک و شیمی  
مدت زمان پاسخ گویی: ۱۲۰ دقیقه

آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۱  
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۹/۱

توجه: درک سوال جزء امتحان می باشد؛ لطفا سوال نفرمایید.

بارم سوالات ۲ و ۵ هریک ۵ نمره و بقیه سوالات هریک ۱۰ نمره می باشد.

۱. الف. آیا معادله  $|z| - z = i$  جواب دارد؟ پاسخ خود را با ذکر دلیل بیان کنید.  
ب. فرض کنید  $z = i$  یک ریشه  $p(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + \alpha$  باشد که در آن  $\alpha \in \mathbb{R}$ . همه ی ریشه های  $p(z)$  را تعیین کنید.

۲. فرض کنید

$a_1 > 0$  و  $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n+1}}$  نشان دهید دنباله  $\{a_n\}$  همگرا است و سپس حد آن را پیدا کنید.

۳. حاصل حدود زیر را بیابید.

الف.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x + 3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

ب. مقدار  $c$  را چنان بیابید که  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$

۴. فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته روی بازه  $[a, b]$  باشد.  $(a < 0, b > 0)$ . نشان دهید تابع  $g(x) = x^2 f(x)$  در صفر مشتق پذیر است و مشتق آن را بیابید.


۵. نشان دهید تابع پارامتری  $x(t) = \sin t - \cos t$  و  $y(t) = \sin t + \cos t$  در معادله  $(x+y) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{y^2} \left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$  صدق می کند.

۶. ثابت کنید اگر  $0 < a < b$  آنگاه  $\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}} < \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}\right) < \frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}$

۷. فرض کنید تابع  $f: [0, 1] \rightarrow [1, 3]$  بر  $[0, 1]$  پیوسته و بر  $(0, 1)$  مشتق پذیر باشد و  $f(0) = f(1) = 1$  و  $c \in (0, 1)$  وجود دارد که  $f(c) = e$ . ثابت کنید نقاط متمایز  $x_1, x_2 \in (0, 1)$  وجود دارند به طوری که  $\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1$

موفق باشید.

دانشکده ریاضی

|   |  |  |
|---|--|--|
| <p>تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۹/۷</p> <p>مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه</p> <p>درک سوالات قسمتی از امتحان است.</p>   |  <p>دانشگاه علم و صنعت ایران</p> <p>دانشکده ریاضی</p> <p>نیمسال اول ۹۹-۱۳۹۸</p> | <p>امتحان میان ترم ریاضی عمومی (۱)</p> <p>رشته های فنی مهندسی و فیزیک</p> <p>نام و نام خانوادگی:</p> |
| <p>(۱) فرض کنید عدد مختلط <math>z = 1 + i</math> ریشه معادله <math>z^4 + az^2 + bz + 1 = 0</math> باشد. مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را بدست آورید.</p>   |  |  |
| <p>(۲) ابتدا نشان دهید دنباله بازگشتی <math>a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{6}{5-a_n}; \forall n &gt; 1</math> همگراست و سپس حد آن را محاسبه نمایید.</p>   |  |  |
| <p>(۳) به ازای مقادیر مثبت <math>a, b, c</math> مطلوبست محاسبه حدود زیر.</p> $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \tan^2 x) \frac{1}{x \sin x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$            |  |  |
| <p>(۴) نشان دهید با شرط <math>\frac{\pi}{2} \leq x &lt; \pi</math> داریم</p> $\left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cot x \leq \ln \sin x \leq 0.$  |  |  |
| <p>(۵) منحنی <math>x^2 + 8xy + y^2 + 11 = 0</math> مفروض است.</p> <p>(الف) <math>\frac{dy}{dx}</math> و <math>\frac{d^2y}{dx^2}</math> را محاسبه کنید.</p> <p>(ب) معادله خط مماس بر این منحنی را در نقطه <math>(-1, 2)</math> بیابید.</p> |  |  |