

ترکیبیات

امیر حسین سبحانی

اصول شمارش

۱.۱.۲ تعریف (اصل جمع). اگر کار A را به n_1 طریق و کار B را به n_2 طریق بتوان انجام داد آنگاه کار A یا

B را به $n_1 + n_2$ طریق می توان انجام داد مشروط بر اینکه فقط یکی از دو کار صورت پذیرد.

به عنوان مثال اگر از محله A به محله B سه مسیر با خط اتوبوس و دو مسیر با تاکسی موجود باشد و نتوان

همزمان از تاکسی و اتوبوس استفاده کرد به $5 = 3 + 2$ طریق می توان از محله A به محله B رسید.

اصول شمارش

۲.۱.۲ تعریف (اصل ضرب). اگر کار A را به n_1 طریق و کار B را به n_2 طریق بتوان انجام داد آنگاه کار A و B را به $n_1 n_2$ طریق می‌توان انجام داد.

به عنوان مثال اگر از شهر A به شهر B سه مسیر و از شهر B به شهر C چهار مسیر موجود باشد، در این صورت بین شهر A و B $12 = 3 * 4$ مسیر موجود است.

اصول شمارش

مثال: به چند طریق می‌توان یک کد چهار رقمی برای حساب عابر بانک انتخاب کرد؟

اصول شمارش

مثال: به چند طریق می توان یک کد چهار رقمی برای حساب عابر بانک انتخاب کرد؟

جواب:

$$\boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} = 10^4$$

مثال: به کمک اعداد 0، 3، 5، و 8 چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

اصول شمارش

مثال: به چند طریق می‌توان یک کد چهار رقمی برای حساب عابر بانک انتخاب کرد؟

جواب:

$$\boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} = 10^4$$

مثال: به کمک اعداد 0، 3، 5، و 8 چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

جایگشت

۱.۲.۲ تعریف (جایگشت یا ترتیب). هر آرایش سطری از n شیء متمایز را یک جایگشت از آنها گویند.

تعداد جایگشت های n شیء متمایز را با $P(n)$ یا P^n و یا $n!$ (فاکتوریل n) نمایش می دهند که برابر است با:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

۲.۲.۲ مثال. به چند طریق می توان ۵ کتاب متفاوت را در یک قفسه کتابخانه قرار داد؟

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

فرمول استرلینگ: وقتی n بزرگ باشد از فرمول استرلینگ می توان جهت تقریب مقدار $n!$ کمک گرفت:

فرمول استرلینگ:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

برای استفاده از فرمول استرلینگ ابتدا لگاریتم تقریب را محاسبه می کنیم:

$$\ln(n!) \approx n(\ln(n) - 1) + \frac{1}{2}(\ln(2\pi) + \ln(n))$$

مثال: مقدار دقیق و مقدار تقریبی $15!$ را به کمک فرمول استرلینگ محاسبه کنید.

$$15! = 1307674368000$$

$$\ln(15!) \approx 15(\ln(15) - 1) + \frac{1}{2}(\ln(2\pi) + \ln(15)) = 27.8937$$

$$15! \approx 1300430722199$$

جایگشت

۵.۲.۲ مثال. ۶ کودک به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند؟

جایگشت

۵.۲.۲ مثال. ۶ کودک به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند؟

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$$

۶.۲.۲ مثال. ۴ خانم و ۳ آقا به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند بطوریکه: خانم‌ها در کنار هم باشند؟ خانم‌ها در کنار هم و آقایان نیز در کنار هم باشند؟

جایگشت

۵.۲.۲ مثال. ۶ کودک به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند؟

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$$

۶.۲.۲ مثال. ۴ خانم و ۳ آقا به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند بطوریکه: خانم‌ها در کنار هم باشند؟ خانم‌ها در کنار هم و آقایان نیز در کنار هم باشند؟

$$4!4!$$

$$2!3!4!$$

جایگشت

• مثال: 4 مرد و 2 خانم به چند طریق می‌توانند صف تشکیل دهند مشروط بر اینکه 2 خانم در ابتدا و انتهای صف باشند؟

جایگشت

• مثال: 4 مرد و 2 خانم به چند طریق می‌توانند صف تشکیل دهند مشروط بر اینکه 2 خانم در ابتدا و انتهای صف باشند؟

$$2!4!$$

مثال: به چند طریق می‌توان n شیء متمایز را روی یک دایره قرار داد؟

جایگشت

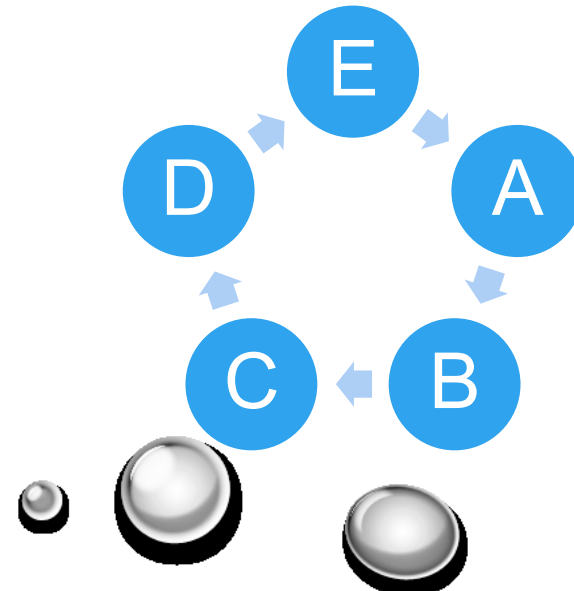
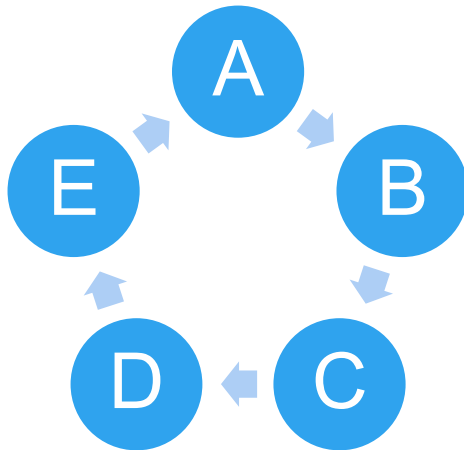
• مثال: 4 مرد و 2 خانم به چند طریق می‌توانند صف تشکیل دهند مشروط بر اینکه 2 خانم در ابتدا و انتهای صف باشند؟

$$2!4!$$

مثال: به چند طریق می‌توان n شیء متمایز را روی یک دایره قرار داد؟

$$(n-1)!$$

جایگشت مستدیر



جایگشت

• مثال: 5 سنگ با رنگ های مختلف را به چند طریق می توان روی یک دایره آرایش داد؟

$$(5-1)!$$

• مثال: این 5 سنگ را به چند طریق می توان روی یک حلقه آرایش داد؟

جایگشت

• مثال: 5 سنگ با رنگ های مختلف را به چند طریق می توان روی یک دایره آرایش داد؟

$$(5-1)!$$

• مثال: این 5 سنگ را به چند طریق می توان روی یک حلقه آرایش داد؟

$$\frac{(5-1)!}{2}$$

• تذکر: در حلقه تفاوتی بین یک جایگشت و تصویر آینه ای آن وجود ندارد.

جایگشت

- مثال: به چند طریق می‌توان 5 کتاب از صد کتاب متمایز را در یک قفسه کتابخانه قرار داد؟

جایگشت

- مثال: به چند طریق می‌توان 5 کتاب از صد کتاب متمایز را در یک قفسه کتابخانه قرار داد؟

$$\boxed{100} \boxed{99} \boxed{98} \boxed{97} \boxed{96} = \frac{100!}{95!}$$

۳.۲.۲ تعریف (r -جایگشت). هر آرایش سطری از r شیء از n شیء متمایز را یک r -جایگشت گویند.

تعداد r -جایگشت ها از n شیء متمایز را با $P(n, r)$ یا P_r^n و نمایش می‌دهند که برابر است با:

$$P(n, r) = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

جایگشت

مثال: 2 مهره آبی و سه مهره قرمز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد؟

جایگشت

مثال: 2 مهره آبی و سه مهره قرمز را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد؟

1	1	2	2	3
1	2	2	1	3
1	3	2	1	2
1	3	2	2	1
1	1	2	3	2
1	2	2	3	1

$$\frac{5!}{3!2!}$$

جایگشت

۷.۲.۲ تعریف (جایگشت تعمیم یافته). گردایه ای از n شیء نه لزوماً متمایز را در نظر بگیرید که در k دسته متمایز قرار دارند. اگر تعداد اعضای هر دسته برابر با n_i باشد که $i = 1, 2, \dots, k$ و اعضای هر دسته کاملاً مشابه باشند در این صورت هر آرایش سطری از این n عنصر را یک جایگشت تعمیم یافته گوییم و تعداد جایگشت های تعمیم یافته این n عنصر برابر است با:

$$P(n : n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

جایگشت

مثال: چهار مهره قرمز، 5 مهره سفید و 6 مهره آبی را با فرض اینکه مهره ها به غیر از رنگ تفاوتی با هم نداشته باشند، به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد؟

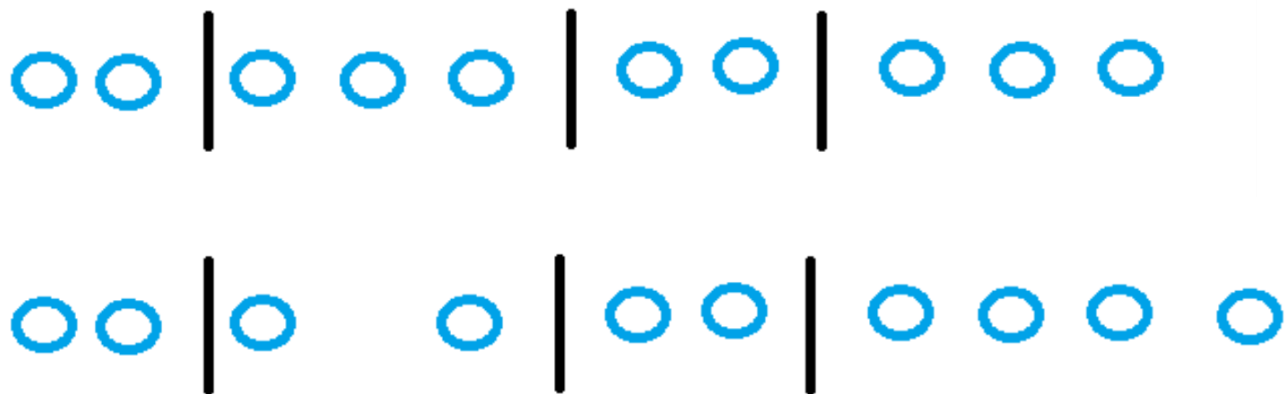
جایگشت

مثال: چهار مهره قرمز، 5 مهره سفید و 6 مهره آبی را با فرض اینکه مهره ها به غیر از رنگ تفاوتی با هم نداشته باشند، به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد؟

$$\frac{15!}{4!5!6!}$$

جایگشت

• مثال: به چند طریق می‌توان 10 مهره یکسان را داخل 4 ظرف قرار داد؟



$$P(10+4-1; 10, 4-1) = \frac{(10+4-1)!}{10!(4-1)!}$$

جایگشت

• نتیجه مهم: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ برابر است با:

$$P(n + m - 1; n, m - 1) = \frac{(n + m - 1)!}{n!(m - 1)!}$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد؟

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد؟

جواب: جواب این مساله معادل با جواب های صحیح و غیر منفی معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12$$

که بنابر فرمول قبل برابر است با:

$$P(n + m - 1; n, m - 1) = P(12 + 5 - 1, 12, 5 - 1) = \frac{16!}{12!4!}$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد، مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد؟

جواب: ابتدا فرض می‌کنیم که به هر فرد یک بلیط داده ایم. در این صورت 7 بلیط باقی می‌ماند. لذا کفایت این بلیط‌ها را بین 5 نفر به دلخواه تقسیم کنیم که تعداد طرق پخش این بلیط‌ها معادل با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 7$$

که برابر است با:

$$P(n + m - 1; n, m - 1) = P(7 + 5 - 1, 7, 5 - 1) = \frac{11!}{7!4!}$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد و به نفر دوم و سوم هر کدام حداقل دو بلیط برسد؟

جواب:

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد و به نفر دوم و سوم هر کدام حداقل دو بلیط برسد؟

جواب:

$$P(n + m - 1; n, m - 1) = P(5 + 5 - 1, 5, 5 - 1) = \frac{9!}{5!4!}$$

ترکیب

۱.۳.۲ تعریف (ترکیب). فرض کنید X یک مجموعه n عضوی باشد. در این صورت هر زیر مجموعه r

عضوی از آنرا یک r -ترکیب می‌گویند. تعداد r -ترکیب های یک مجموعه n عضوی را با $C(n, r)$ نشان

می‌دهند و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ترکیب

مثال: به چند طریق می‌توان از یک کلاس 15 نفره یک تیم 5 نفره ریاضی تشکیل داد؟
جواب:

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!}$$

در مثال زیر ارتباط جایگشت تعمیم یافته و ترکیب را می‌بینیم:

مثال: 3 مهره سفید و 2 مهره مشکی را به چند طریق می‌توان در کنارهم قرار داد؟

جواب: ابتدا 5 جایگاه را برای مهره‌ها در نظر می‌گیریم. حال سه جایگاه از این 5 جایگاه را برای قرار دادن مهره‌های سفید انتخاب می‌کنیم، طبیعتاً دو مهره مشکی در دو جایگاه باقیمانده قرار می‌گیرد. لذا جواب مساله برابر است با:


$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = P(5; 2, 3)$$

ترکیب

برخی خواص ترکیب:

➤ با توجه به اینکه متمم هر یک زیر مجموعه k عضوی یک مجموعه n عضوی، مجموعه ای $n - k$ عضوی است، لذا:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

➤ چون تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی 2^n است، داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

ترکیب

مثال: نشان دهید ضرب $x^k y^{n-k}$ در بسط $(x + y)^n$ برابر است با $\binom{n}{k}$.

حل: با توجه به اینکه

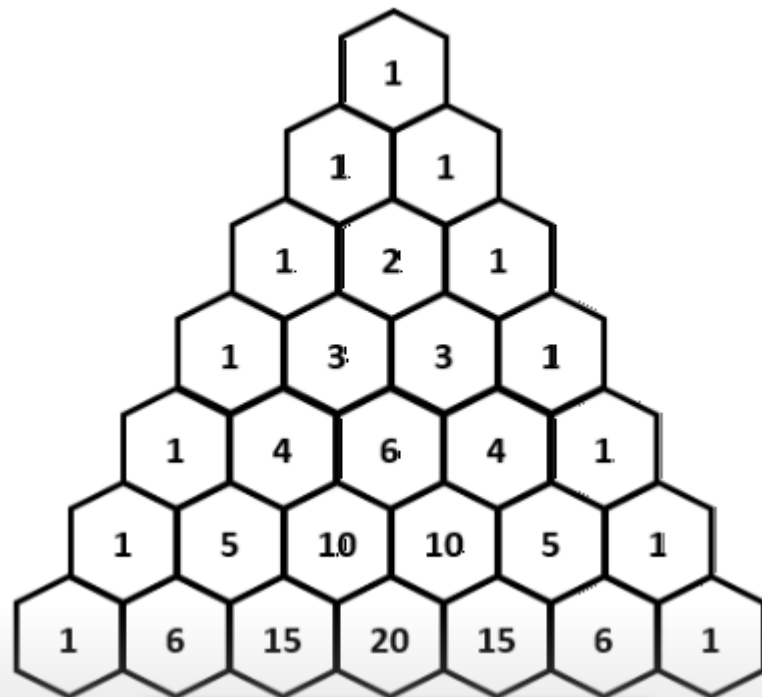
$$(x + y)^k = (x + y)(x + y) \dots (x + y)$$

برای حاصل شدن عبارت $x^k y^{n-k}$ باید k پرانتز در بالا را به دلخواه انتخاب کرده و x آنرا در y بقیه پرانتزها ضرب نموده این کار به $\binom{n}{k}$ طریق امکان پذیر است.

بسط دو جمله ای نیوتن:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n} y^n$$

مثلث پاسکال:



ترکیب

در حالت کلی می‌توان دید که هر ترکیب و یا ترکیب تعمیم یافته در واقع یک جایگشت تعمیم یافته هستند. لذا ممکن است بسته به نگاه و ذهنیت فرد یک مساله به کمک ترکیب و یا جایگشت تعمیم یافته حل شود.

مثال: به چند طریق می‌توان از یک کلاس 11 نفره یک تیم دو نفره، یک تیم چهار نفره، و یک تیم 5 نفره انتخاب کرد به طوری که هر فرد دقیقا در یک تیم قرار بگیرد؟

ترکیب

در حالت کلی می‌توان دید که هر ترکیب و یا ترکیب تعمیم یافته در واقع یک جایگشت تعمیم یافته هستند. لذا ممکن است بسته به نگاه و ذهنیت فرد یک مساله به کمک ترکیب و یا جایگشت تعمیم یافته حل شود.

مثال: به چند طریق می‌توان از یک کلاس 11 نفره یک تیم دو نفره، یک تیم چهار نفره، و یک تیم 5 نفره انتخاب کرد به طوری که هر فرد دقیقا در یک تیم قرار بگیرد؟

جواب: ابتدا از بین 11 نفر 5 نفر را انتخاب می‌کنیم، سپس از بین 6 نفر باقیمانده 4 نفر را انتخاب می‌کنیم، در نهایت از بین 2 نفر باقیمانده باید دو نفر را انتخاب کنیم لذا طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با:

$$\begin{aligned}\binom{11}{5} \times \binom{6}{4} \times \binom{2}{2} &= \frac{11!}{5!6!} \times \frac{6!}{4!2!} \times \frac{2!}{2!0!} \\ &= \frac{11!}{5!4!2!} = P(11;5,4,2)\end{aligned}$$

ترکیب

۲.۳.۲ تعریف (ترکیب تعمیم یافته). گردایه ای از n شیء را می‌خواهیم در k گروه متمایز قرار دهیم که هر

شیء دقیقا در یکی از این گروه ها قرار گیرد. اگر گروه اول دارای n_1 عضو، گروه دوم دارای n_2 عضو، ...، و

گروه k ام دارای n_k عضو باشد. در این صورت n_1 شیء گروه اول را می‌توان به $C(n, n_1)$ ، n_2 عضو گروه دوم را

می‌توان به $C(n - n_1, n_2)$ طریق، و به همین ترتیب همه گروه ها را پر می‌نماییم. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد

کل راه هایی که برای انتخاب اعضای این گروه ها داریم برابر است با:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n, n_1) C(n - n_1, n_2) \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k)$$

ترکیب

قضیه:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

ترکیب

قضیه:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

مثال: تعداد جایگشت های 3 مهره سفید، 4 مهره مشکی، و 5 مهره سبز را بیابید.

ترکیب

قضیه:

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

مثال: تعداد جایگشت های 3 مهره سفید، 4 مهره مشکی، و 5 مهره سبز را بیابید.

جواب:

$$\binom{12}{3} \binom{9}{4} \binom{5}{5} = \frac{12!}{3!4!5!}$$

ترکیب

نکته: با توجه به ارتباط بین جایگشت تعمیم یافته و ترکیب، تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

برابر است با:

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$



مثال: یک باشگاه برای تولد 11 بازیکن خود جشن تولد می‌گیرد. تعداد جشن های تولدها به چند طریق ممکن است در ماه های سال پراکنده شده باشد؟



مثال: یک باشگاه برای تولد 11 بازیکن خود جشن تولد می‌گیرد. تعداد جشن های تولدها به چند طریق ممکن است در ماه های سال پراکنده شده باشد؟

جواب: 12 ماه سال را 12 ظرف و یازده بازیکن را یازده مهره در نظر می‌گیریم، بنابراین مساله ما معادل با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 11$$

که برابر است با:

$$\binom{11+12-1}{12-1} = \frac{22!}{11!11!}$$

ترکیب

مثال: به چند طریق می توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقاً در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

ترکیب

مثال: به چند طریق می توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

$$\binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4} = \frac{12!}{4!4!4!}$$

ترکیب

مثال: به چند طریق می توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقاً در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

$$\binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4} = \frac{12!}{4!4!4!}$$

مثال: به چند طریق می توان دو تیم 3 نفره، یک تیم 4 نفره، و سه تیم 5 نفره از یک کلاس 25 نفره تشکیل داد، که هر فرد دقیقاً در یک تیم قرار داشته باشند؟

ترکیب

مثال: به چند طریق می توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

$$\binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4} = \frac{12!}{4!4!4!}$$

مثال: به چند طریق می توان دو تیم 3 نفره، یک تیم 4 نفره، و سه تیم 5 نفره از یک کلاس 25 نفره تشکیل داد، که هر فرد دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب: (مساله افراز نامرتب)

$$\frac{25!}{(5!5!5!)3!4!(3!3!)2!}$$