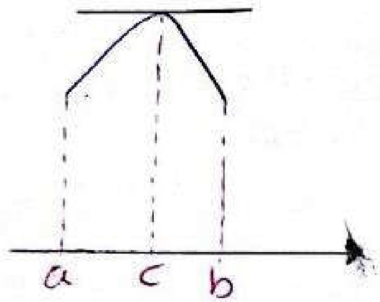
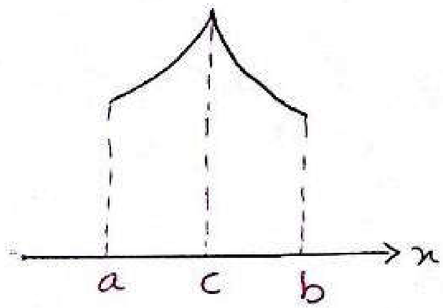
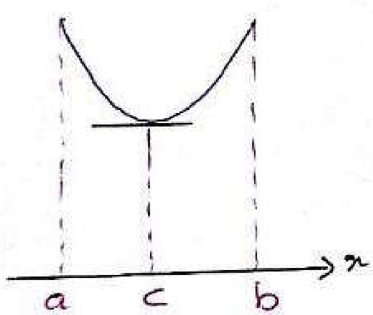
مقادیر اکسترمم:

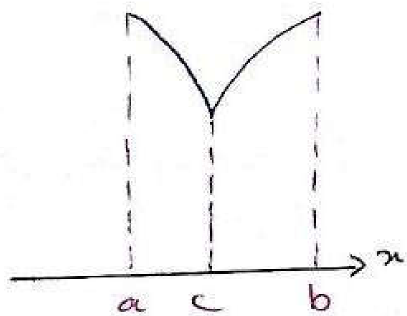
تعریف: گوییم تابع f در c دارای یک ماکزیمم نسبی است هرگاه بازه بازی مانند I شامل نقطه c وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in I$ ، $f(c) \geq f(x)$. عدد c را نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می نامند.





تعریف: گوییم تابع f در c دارای یک مینیمم نسبی است هرگاه بازه بازی مانند I شامل نقطه c وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in I$ ، $f(c) \leq f(x)$. عدد c را نقطه مینیمم نسبی تابع f می نامند.





اگر تابع f در c دارای یک ماکزیمم نسبی یا یک مینیمم نسبی باشد، آنگاه گفته می شود که f در c دارای یک اکسترمم نسبی است. عدد c را نقطه اکسترمم نسبی f می نامند.

قضیه:

فرض کنیم $f(x)$ برای هر x در بازه باز (a,b) تعریف شده و $a<c<b$. اگر f دارای اکسترمم نسبی در c باشد، آنگاه یا $f'(c)$ وجود نداشته، یا در صورت وجود $f'(c)=0$.

تذکر:

اگر تابع f فقط روی بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط a و b نمی توانند نقاط اکسترمم نسبی تابع باشند، به دلیل آنکه تابع f در همسایگی نقاط a و b تعریف نشده است.

تعریف:

فرض کنیم c عضوی از حوزهٔ تعریف f باشد، عدد c را یک نقطه بحرانی تابع f می‌نامیم در صورتی که $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

تعریف:

گوییم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ دارای ماکزیمم مطلق است هرگاه عددی مانند $c \in [a,b]$ وجود داشته باشد بطوریکه به‌ازای هر $x \in [a,b]$، $f(c) \geq f(x)$. در چنین حالتی، $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق f بر بازه $[a,b]$ نامیده می‌شود.

تعریف:

گوییم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ دارای می‌نیمم مطلق است هرگاه عددی مانند $d \in [a,b]$ وجود داشته باشد بطوریکه به‌ازای هر $x \in [a,b]$، $f(d) \leq f(x)$. در چنین حالتی، $f(d)$ مقدار می‌نیمم مطلق f بر بازه $[a,b]$ نامیده می‌شود.

هرگاه گفته شود که تابع f بر $[a,b]$ دارای اکسترمم مطلق است منظور این است که f بر این بازه دارای ماکزیمم مطلق یا می‌نیمم مطلق می‌باشد.

قضیه مقدار نهایی:

اگر تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه بر $[a,b]$ دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق است. بعبارت دیگر دو عدد مانند x_1 و x_2 در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ وجود دارند بطوریکه به‌ازای هر $x \in [a,b]$، $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$.

قضیه:

فرض کنیم تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ تعریف شده و نقطه c با شرط $a<c<b$، نقطه اکسترمم مطلق این تابع باشد. در اینصورت c یک نقطه بحرانی تابع f است.

یافتن اکسترمم های مطلق یک تابع پیوسته بر روی یک بازه بسته:

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، برای یافتن ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع f بر $[a, b]$ به طریق زیر عمل می نماییم:

1) نقاط بحرانی تابع f بر بازهٔ (a, b) را پیدا می کنیم.

2) مقدار f را در هر یک از نقاط بحرانی (a, b) پیدا می کنیم.

3) مقدار f در نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$، یعنی $f(a)$ ، $f(b)$ را پیدا می کنیم.

4) بزرگترین مقادیر در (2) و (3) ماکزیمم مطلق تابع f و کوچکترین مقادیر در (2) و (3) می نیمم مطلق تابع f بر $[a, b]$ می باشد.

مثال: اکسترمم های مطلق توابع زیر را در بازه های بسته داده شده بدست آورید.

1) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \quad , \quad x \in [-2, \frac{1}{2}]$

با توجه به اینکه این تابع پیوسته است، با توجه به قضیه مقدار نهایی روی بازه بسته $[-2, \frac{1}{2}]$ اکسترمم مطلق دارد.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad (3x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع f نقاط -1 و $\frac{1}{3}$ هستند. مقدار تابع را در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی $\frac{1}{2}$ و -2 محاسبه می کنیم:

$$f(-2) = -1, \quad f(-1) = 2, \quad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{7}{8} \quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{22}{27}$$

لذا f در $x = -1$ ماکزیمم مطلق و در $x = -2$ می نیمم مطلق دارد.

② $(x-2)^{\frac{2}{3}}$, $[1,5]$

چون تابع روی $[1,5]$ پیوسته است لذا باتوجه به قضیه مقدارهای روی بازه بسته $[1,5]$ اکسترمم مطلق دارد.

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

نقطه بحرانی $x=2$ است که در آن مشتق موجود نیست. مقدار f را در $x=2$ و نقاط 1 و 5 حساب می‌کنیم

$$f(1)=1 \quad , \quad f(2)=0 \quad , \quad f(5)=\sqrt[3]{3}$$

لذا f در 2 می‌نیمم و در $x=5$ ماکزیمم مطلق دارد

③ $x^2 \ln(x)$, $[1,e]$

تابع روی $[1,e]$ پیوسته است و لذا قضیه مقدارهای روی این بازه معتبر است

$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x)+1)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x(2\ln(x)+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2\ln(x)+1=0 \end{cases}$$

$$2\ln(x)=-1 \Rightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

اما $1>\frac{1}{\sqrt{e}}$، لذا تابع فوق در بازه $[1,e]$ نقطه بحرانی ندارد.

حال مقدار $f(1)$ و $f(e)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1)=0 \quad , \quad f(e)=e^2$$

پس تابع f دارای می‌نیمم مطلق $f(1)=0$ و ماکزیمم مطلق $f(e)=e^2$ است.

قضیه رل و مقدار میانگین :

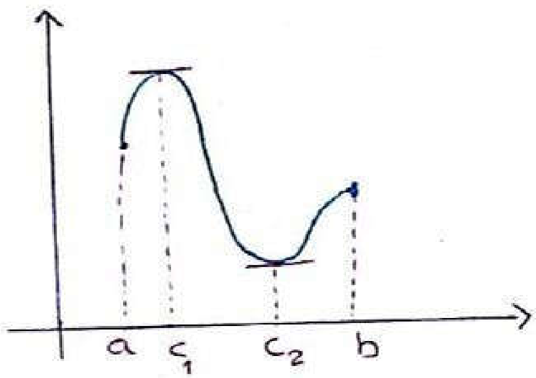
فرض کنید تابع f در شرایط زیر صدق کند :

i) f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته است .

ii) f بر بازه باز (a,b) مشتق پذیر است .

iii) $f(a)=f(b)$

در اینصورت نقطه‌ای چون $c\in(a,b)$ موجود است که $f'(c)=0$.



مثال : نشان دهید معادله $f(x)=x^3+x-1=0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد .

حل : چون چندجمله‌ای فوق یک چندجمله‌ای از درجه فرد با ضرایب حقیقی است، حداقل یک ریشه دارد .
حال ثابت می‌کنیم تابع فوق بیش از یک ریشه ندارد . فرض کنید این چندجمله‌ای دو ریشه مانند a و b داشته باشد، در اینصورت $f(a)=f(b)=0$ ، لذا طبق قضیه رل باید $c\in(a,b)$ ای چنان موجود باشد که $f'(c)=0$. از طرفی

$$f'(x)=3x^2+1>0$$

لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

قضیه مقدار میانگین:

فرض کنید تابع f در شرایط قضیه زیر صدق کند:

1) f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد.

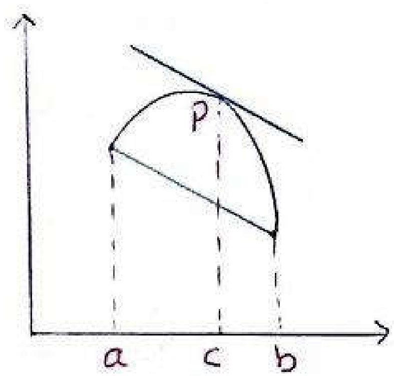
2) f تابعی مشتق پذیر روی بازه (a,b) باشد.

دراینصورت نقطه‌ای چون $c \in (a,b)$ چنان موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بطور معادل

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$



طبق قضیه مقدار میانگین شیب خط گذرا از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ با شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای مانند $(c,f(c))$ برابر است، لذا این دو خط باهم موازی هستند.

مثال: فرض کنید $f(0)=-3$ و $f'(x) \leq 5$ برای تمام مقادیر x برقرار باشد، $f(2)$ چقدر بزرگ می‌تواند باشد؟

$$f(2)-f(0) = f'(c)(2-0)$$

$$f(2) = f(0)+2f'(c) \leq -3+10=\boxed{7}$$

قضیه:
اگر $f'(x)=0$ برای هر x در بازه (a,b) برقرار باشد، در اینصورت تابع f روی بازه (a,b) یک عدد ثابت است.

اثبات: فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در (a,b) باشند و $x_1<x_2$.
چون f روی (a,b) مشتق پذیر است لذا روی (x_1,x_2) نیز مشتق پذیر است و همچنین روی $[x_1,x_2]$ پیوسته می باشد. لذا در قضیه مقدار میانگین صدق می کند، بنابراین $c\in(x_1,x_2)$ ای چنان موجود است که

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(b-c)$$

پس $f(x_2)=f(x_1)$. لذا تابع f در هر دو نقطه انتخابی دلخواه در بازه (a,b) مقدار مشابهی دارد پس تابع f روی (a,b) تابع ثابت است.

نتیجه:
اگر $f'(x)=g'(x)$ برای هر $x\in(a,b)$ برقرار باشد، در اینصورت $f-g$ تابع ثابت روی بازه (a,b) می باشد یعنی $f(x)=g(x)+c$

اثبات:
کافیست تابع $F(x)=f(x)-g(x)$ را در نظر بگیریم بنابراین

$$\forall x\in(a,b)\quad F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

$F(x)$ روی (a,b) تابع ثابت $F(x)=c$ است. بنابراین

$$f(x)-g(x)=c \Rightarrow f(x)=g(x)+c$$

مثال: نشان دهید $\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

حل: تابع $f(x)$ را بصورت $f(x)=\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)$ تعریف می کنیم.

لذا
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

بنابراین $f(x)=c$. برای تعیین مقدار c یک نقطه مانند 1 را در نظر می گیریم

$$f(1)=\tan^{-1}(1)+\cot^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین $c=\frac{\pi}{2}$. لذا $\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

مثال: اتحاد زیر را ثابت کنید: $\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=2\tan^{-1}(\sqrt{x})-\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-2\tan^{-1}(\sqrt{x})$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}}\times\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\right)-2\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{4x}{(x+1)^2}}}\times\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}-\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}=0$$

پس $f(x)=c$. از طرفی $\left(f(0)=\sin^{-1}(-1)-2\tan^{-1}(0)=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}\right)$ لذا $c=-\frac{\pi}{2}$ و بنابراین اتحاد برقرار است.

مثال: نشان دهید معادله $x^3-15x+c=0$ حداکثر یک ریشه در بازه $[-2,2]$ دارد.

$$f(x)=x^3-15x+c$$

فرض کنید این معادله دو ریشه مانند x_1 و x_2 در $[-2,2]$ داشته باشد.

بنابراین $f(x_1)=f(x_2)=0$. لذا طبق قضیه رل باید $c\in(x_1,x_2)$ ای وجود داشته باشد که در آن $f'(c)=0$. از طرفی

$$f'(x)=3x^2-15=0 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

که هیچ کدام در بازه $(-2,2)$ قرار ندارند لذا فرض خلف باطل است.

مثال: نشان دهید معادلات $2x+\cos(x)=0$ و $x^3+e^x=0$ دقیقاً یک ریشه دارند.

1) $f(x)=2x+\cos(x)$ $\qquad f(5)=10+\cos(x)>0$

$$f(-5)=-10+\cos(x)<0$$

لذا چون $f(5)f(-5)<0$ طبق قضیه مقدار میانی این تابع حداقل یک ریشه در بازه $(-5,5)$ دارد. حال فرض کنید این تابع دو ریشه مانند x_1 و x_2 داشته باشد که $x_1<x_2$ لذا طبق قضیه رل باید $c\in(x_1,x_2)$ ای موجود باشد که $f'(c)=0$

$$(f(x_1)=0 \quad , \quad f(x_2)=0)$$

اما: $f'(x)=2-\sin(x)\geq 1$

و این تناقض است پس این تابع دقیقاً یک ریشه دارد.

قسمت دوم کاملاً مشابه است (حل به عهده دانشجو)

مثال: آیا تابعی چون f موجود است که $f(0)=-1$ و $f(2)=4$ و $f'(x)\leq 2$ برای هر x.

حل: چون برای هر x، $f'(x)\leq 2$ لذا f روی بازه $(0,2)$ مشتق پذیر و روی $[0,2]$ پیوسته است. بنابر قضیه مقدار میانگین c ای در (a,b) چنان موجود است که

$$f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)$$

$$4-(-1)=f'(c)2 \Rightarrow f'(c)=\frac{5}{2}$$

امّا $f'(x)\leq 2$ است، بنابراین چنان تابعی موجود نیست.

مثال: نشان دهید برای هر $x>0$، $\sin(x)<x$.

حل: اگر $x>2\pi$ باشد که چون $\sin(x)<1$ واضح است. اگر $0<x\leq 2\pi$، در اینصورت به کمک قضیه مقدار میانگین c ای در بازه $(0,x)$ چنان موجود است که

$$\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\cos(c)<1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x}=\cos(c)<1 \Rightarrow \sin(x)<x$$

مثال: نشان دهید $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ برای $x>0$ و $-1\leq x<0$ برقرار است.

حل: اگر $x>0$ باشد قضیه مقدار میانگین را برای تابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ روی بازه $[0,x]$ به کار می‌بریم، در اینصورت داریم:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{1+c}}<\frac{1}{2} \qquad (0<c<x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x}-1<\frac{1}{2}x \Rightarrow \sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x$$

اگر $0 > x \geq -1$ قضیه مقدار میانگین را روی بازه $[x, 0]$ برای تابع $f(x) = \sqrt{1+x}$ به کار می بریم، دراینصورت $c \in (x, 0)$ ای چنان موجود است که:

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{-x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} > \frac{1}{2}$$

(چون $c < 0$) با ضرب طرفین در $-x$ و عوض نشدن جهت نامساوی داریم

$$1 - \sqrt{1+x} > -\frac{1}{2}x \Rightarrow \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2}$$

مثال: نشان دهید برای $x < \frac{\pi}{2}$ رابطه $\tan(x) > x$ برقرار است.

حل: قضیه مقدار میانگین را روی بازه $[0, x]$ به کار می بریم:

$$\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = f'(c) = \sec^2(c) = \frac{1}{\cos^2(c)}$$

که $0 < c < x$. ازطرفی چون $0 < \cos(x) < 1$ برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$، پس $\frac{1}{\cos(x)} > 1$ برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$. لذا $\frac{1}{\cos^2(x)} > 1$. درنهایت داریم:

$$\frac{\tan(x)}{x} > 1 \Rightarrow \tan(x) > x$$

قضیه کوشی:

اگر توابع f و g روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر باشند و اگر $g'(x) \neq 0$ برای هر $x \in (a, b)$ برقرار باشد. دراینصورت $c \in (a, b)$ ای چنان موجود است که

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

مثال: نشان دهید که برای $x \in (0,1)$ رابطه زیر برقرار است:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}(x)} < 1$$

حل: در قضیه کوشی تابع $f(x)$ و $g(x)$ را بصورت $f(x) = \ln(1+x)$ و $g(x) = \sin^{-1}(x)$ در نظر می‌گیریم، واضح است که $g(x)$ وقتی $0<x<1$ مخالف صفر است و هر دو تابع روی بازه $(0,1)$ مشتق پذیر هستند، لذا شرایط قضیه کوشی برقرار است. بنابراین قضیه کوشی را روی بازه $[0,x]$ بکار می‌بریم:

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad c \in (0,x)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{\sin^{-1}(x)-\sin^{-1}(0)} = \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}(x)} = \frac{\frac{1}{1+c}}{\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}} = \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$$

چون $0<c<x$ داریم

$$1<1+c<1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

چون $0>-c>-x$ پس:

$$1-x<1-c<1$$

از دو نامساوی فوق داریم:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} < 1$$

پس $0<x<1$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\sin^{-1}(x)} < 1$$

مثال: نشان دهید تفاضل ریشه دوم دو عدد طبیعی متوالی بزرگتر از n^2 از $\frac{1}{2n}$ کمتر است.

حل: فرض کنید اعداد طبیعی m و $m+1$ بزرگتر از n^2 باشند، تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را روی بازه بسته $[m, m+1]$ درنظر می‌گیریم. واضح است که شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است، پس:

$$\frac{f(m+1)-f(m)}{(m+1)-m}=f'(c) \qquad m<c<m+1$$

از طرفی چون $n^2<c$ لذا $n<\sqrt{c}$،

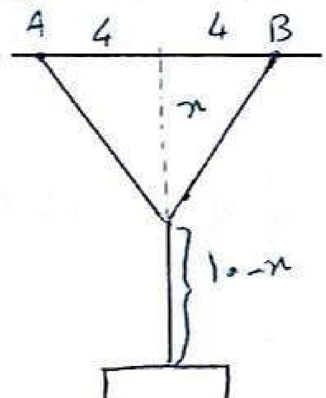
$$\Rightarrow \sqrt{m+1}-\sqrt{m}=\frac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow$$

پس:

$$\sqrt{m+1}-\sqrt{m}<\frac{1}{2n}$$

بهینه‌سازی:

مثال: به وسیله سیمی به شکل ۲ باید وزنه‌ای را $10\,m$ پایین‌تر از یک خط افقی مانند AB آویزان کنیم. اگر فاصله بین نقاط A و B برابر $8m$ باشد، طول کوتاهترین سیمی که برای این منظور می‌توان بکار برد چقدر است؟



$$f(x)=2\sqrt{x^2+16}+10-x \qquad 0\leq x\leq 10$$

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}-1$$

برای بدست آوردن نقاط بحرانی، $f'(x)=0$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}=1 \Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+16} \Rightarrow 4x^2=x^2+16 \Rightarrow 3x^2=16 \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

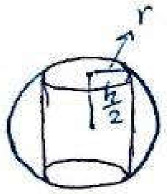
لذا $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ نقطه بحرانی f است. حال مقدار تابع f را در $x=0$، $x=10$ و $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$ مقایسه می‌کنیم.

$f(0)=18$ $\qquad f\left(\frac{4}{\sqrt3}\right)=10+\frac{12}{\sqrt3}=10+4\sqrt3$

$f(10)=4\sqrt{29}$

لذا مینیمم مطلق f به ازای $x=\frac{4}{\sqrt3}$ بدست می‌آید و کمترین میزان سیمی که نیاز است $10+4\sqrt3$ متر است.

مثال: ابعاد استوانه‌ای مستدیر را بیابید که در یک کره به شعاع 6 محاط باشد و بیشترین حجم را داشته باشد.



$$r^2+\frac{h^2}{4}=R^2$$

$$r^2+\frac{h^2}{4}=36 \Rightarrow r^2=36-\frac{h^2}{4}$$

$$V=\pi r^2h=\pi\left(36-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi\left(36h-\frac{h^3}{4}\right)$$

$$V'=\pi\left(36-\frac{3}{4}h^2\right)=0$$

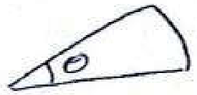
$$\Rightarrow \frac{3}{4}h^2=36 \Rightarrow h^2=\frac{4\times36}{3} \Rightarrow h=\frac{12\sqrt3}{3}=4\sqrt3$$

مقدار V را به ازای $h=0$ ، 12 ، $4\sqrt3$ محاسبه می‌کنیم، مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار برای $h=4\sqrt3$ رخ می‌دهد سپس

$$r^2=36-\frac{h^2}{4}=24 \Rightarrow r=\sqrt{24}=2\sqrt6$$

تمرین: مسئله قبل را برای بیشینه کردن مساحت جانبی استوانه حل کنید
$(S=2\pi rh)$

مثال: مفتولی به طول L را به قطاع دایره‌ای به زاویه θ تبدیل می‌کنیم. θ چقدر باشد که مساحت قطاع بیشینه شود.



$$S = \frac{1}{2}\theta r^2$$

محیط: $P = r\theta + 2r \Rightarrow r(\theta+2) = L \Rightarrow r = \frac{L}{\theta+2}$

$$S = \frac{1}{2}\theta\left(\frac{L^2}{(\theta+2)^2}\right) \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

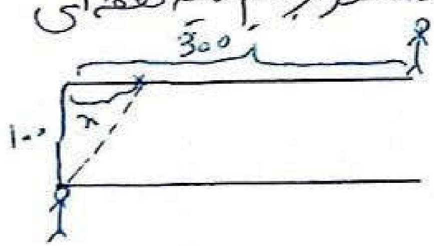
$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{L^2}{2(\theta+2)^2} - \frac{\theta L^2}{(\theta+2)^3} = \frac{L^2(\theta+2) - 2\theta L^2}{2(\theta+2)^3} = \frac{L^2(2-\theta)}{2(\theta+2)^3}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 2$$

$$S(0) = 0 \quad , \quad S(2\pi) = \pi\left(\frac{L^2}{(\pi+1)^2}\right) \quad , \quad S(2) = \frac{L^2}{16}$$

پس $\theta = 2$ جواب مسئله است.

مثال: فرض کنید در کنار رودخانه‌ای به عرض 100 متر ایستاده‌ایم و شخص دیگری در سمت دیگر رودخانه کمک می‌خواهد که 300 متر در سمت راست ما قرار دارد. می‌توانیم با سرعت $5\frac{m}{s}$ در کنار رودخانه برویم و با سرعت $3\frac{m}{s}$ شنا کنیم. می‌خواهیم در امتداد یک خط راست در رودخانه شنا کنیم و خود را به سمت دیگر برسانیم. برای اینکه سریعتر به فرد مورد نظر برسیم تا چه نقطه‌ای باید شنا کنیم.



$$t = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{3\sqrt{100^2 + x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 9 \times 10^4 \Rightarrow 4x = 300 \Rightarrow x = 75$$

نرخ های وابسته:

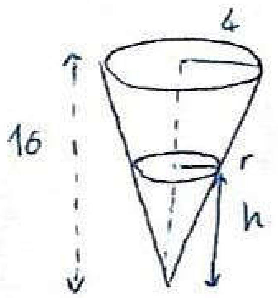
مثال: حجم یک بالون که توسط یک پمپ هوا در آن دمیده می شود با نرخ $100\ \frac{cm^3}{s}$ در حال افزایش است. اگر شکل این بالون کروی باشد. نرخ افزایش شعاع آن وقتی که قطر کره $50\ cm$ است، چقدر می باشد؟

$$\frac{dv}{dt} = 100\ \frac{cm^3}{s} \quad , \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=25cm} = ?$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \left[\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}\right]$$

$$100 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{25}{\pi r^2} \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=25} = \frac{25}{\pi(25)^2} = \frac{1}{25\pi}$$

مثال: یک منبع آب بشکل مخروطی برعکس با سطح مقطع دایره ای به شعاع 4 متر و ارتفاع 16 متر را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. اگر این منبع با نرخ $2\ \frac{m^3}{min}$ در حال پر شدن باشد. وقتی ارتفاع آب در آن به 5 متر می رسد، ارتفاع آن با چه آهنگی افزایش می یابد؟



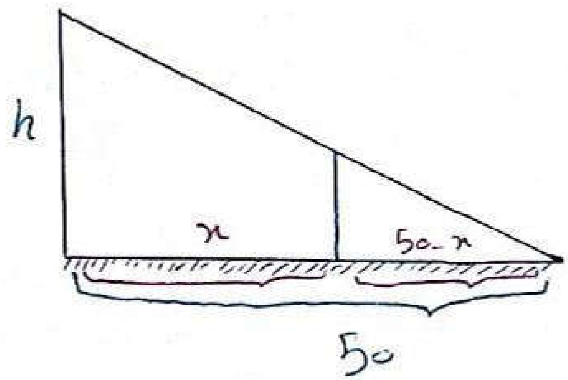
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \frac{r}{h} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = r = \frac{1}{4}h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 h^2 h = \frac{1}{48}\pi h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$2 = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2} \Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$

مثال: فردی با قد ۶ پا در حال قدم زدن به سمت ساختمانی با سرعت 5 پا بر ثانیه است اگر یک چراغ قوه در 50 پایی ساختمان روی زمین قرار داشته باشد. سایه مرد با چه آهنگی وقتی که مرد 30 پا با ساختمان فاصله دارد، تغییر می‌کند.

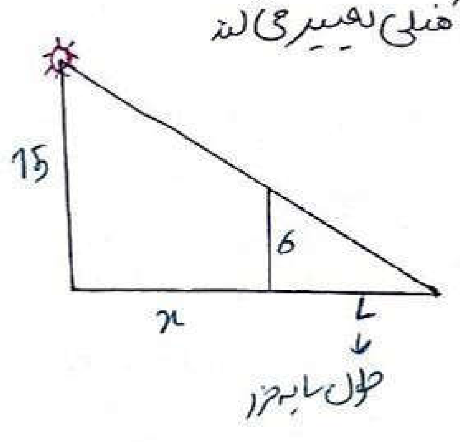


$$\frac{6}{50-x} = \frac{h}{50} \Rightarrow h = \frac{300}{50-x} = 300(50-x)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = 300(50-x)^{-2}\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=30} = 300\times\frac{1}{400}(-5) = \frac{15}{4}\ \frac{ft}{s}$$

مثال: یک چراغ در ارتفاع 15 پایی یک خیابان آویزان شده است. اگر فردی با قد 6 پا از چراغ با آهنگ 5 پا بر ثانیه دور شود، طول سایه این فرد با چه آهنگی تغییر می‌کند



$$\frac{15}{x+L} = \frac{6}{L}$$

$$6x + 6L = 15L \Rightarrow 6x = 9L$$

$$x = \frac{3}{2}L \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}\times 5 = \frac{10}{3}$$

مثال: یک استخر شنا به شکل مستطیل به طول 20m و عرض 8m است. کف استخر سطح شیب‌داری است که عمق قسمت کم آن 1m و قسمت عمیق آن 3m است. آب استخر با آهنگ $1\ \frac{m^3}{min}$ در حال پر شدن است. وقتی که ارتفاع آب در قسمت عمیق 0.5m است. سطح آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟

تقریب خطی و دیفرانسیل: فرض کنید تابع f در x_0 مشتق پذیر باشد و $x \in D_f$. آنگاه $\Delta x = x - x_0$، در اینصورت نمو تابع f، Δy، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

از طرفی طبق تعریف مشتق

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لذا برای Δx های به اندازه کافی کوچک

$$f'(x_0) \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\Delta x$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

بطور خلاصه برای هر $x \in D_f$ که f در آن مشتق پذیر است و برای هر Δx که $x + \Delta x$ نیز متعلق به D_f باشد، به شرط اینکه Δx به اندازه کافی کوچک باشد:

$$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

مثال: مقدار $\sin(46^\circ)$ را تقریب بزنید.

$$f(x) = \sin(x) \quad , \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$\sin(x + \Delta x) \simeq \sin(x) + \cos(x)\Delta x$$

$$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \qquad x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(46^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \simeq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} = 0.7194$$