تذکر: روش کاهش مرتبه برای حل معادلات دیفرانسیل خطی از مراتب بالاتر نیز کاربرد دارد.

مثال: اگر $y_1 = x$ جواب معادله دیفرانسیل

$$x^{(3)} y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0$$

باشد، جواب عمومی آنرا بدست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $y_2 = v y_1 = v x$ لذا

$$y_2' = v' x + v \quad , \quad y_2'' = v'' x + v' + v' = v'' x + 2v'$$

$$y''' = v''' x + 3v''$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$x^3 (v^{(3)} x + 3v'') - 3x^2 (v'' x + 2v') + 6x (v' x + v) - 6 v x = 0$$

$$x^4 v^{(3)} + 3x^3 v'' - 3x^3 v'' - 6x^2 v' + 6x^2 v' + 6x v - 6x v = 0$$

$$x^4 v^{(3)} = 0 \xrightarrow{x \neq 0} v^{(3)} = 0 \Rightarrow v'' = c_1 \Rightarrow v' = c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow v = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\Rightarrow y_2(x) = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3) x$$

دقت کنید که y_2 جواب عمومی معادله است (سه ثابت دلخواه و توابع مستقل خطی x، x^2، x^3)

همانطور که دیدیم در روش کاهش مرتبه، یک جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n و همگن نیاز است. پس حدس جواب نقش کلیدی در حل این معادلات بازی می‌کند، در ادامه نکاتی در این زمینه بیان می‌شود.

معادله دیفرانسیل

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y(x)=0$$

را در نظر بگیرید:

1) اگر مجموع ضرایب این معادله دیفرانسیل صفر باشد یعنی

$$a_n(x)+a_{n-1}(x)+\cdots+a_1(x)+a_0(x)=0$$

در اینصورت $\boxed{y_1(x)=e^x}$ یک جواب معادله است.

2) اگر مجموع ضرایب مشتقات مرتبه فرد با مجموع ضرایب مشتقات زوج و y برابر باشد، $\boxed{y_1(x)=e^{-x}}$ یک جواب معادله است.

3) چنانچه $a_1(x)+xa_0(x)=0$، آنگاه یک جواب معادله فوق $y_1=x$ می باشد.

حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و همگن با ضرایب ثابت:

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=0 \qquad (1)$$

باتوجه به اینکه ضرایب معادله فوق ثابت هستند، جهت حل مسئله فرم جواب را $y=e^{rx}$ در نظر می گیریم. با جایگذاری در معادله داریم:

$$a_2r^2e^{rx}+a_1re^{rx}+a_0e^{rx}=0$$

$$(a_2r^2+a_1r+a_0)e^{rx}=0$$

چون $e^{rx}\neq 0$، لذا باید

$$a_2r^2+a_1r+a_0=0$$

معادله فوق را معادله مفسر یا شاخص نظیر معادله دیفرانسیل (1) می نامیم. براساس ریشه های

معادله مفسر سه حالت جهت تعیین جواب عمومی معادله (1) پیش می آید.

الف) اگر $\Delta>0$ باشد، یعنی معادله مفسر دارای دو ریشه حقیقی مانند r_1 و r_2 باشد، در اینصورت e^{r_1x} و e^{r_2x} از هم مستقل خطی هستند و در اینصورت جواب عمومی معادله فوق $y_g=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ است.

ب) اگر $\Delta=0$، در اینصورت معادله دارای ریشه تکراری $r_1=r_2=r$ است. لذا یک جواب معادله $y_1=e^{rx}$ و جواب دوم مستقل خطی آن به کمک کاهش مرتبه و فرمول آبل بصورت $y_2=xe^{rx}$ خواهد بود لذا جواب عمومی مسأله برابر است با:

$$y_g=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$$

ج) اگر $\Delta<0$ باشد، در اینصورت معادله فوق دو جواب مختلط به فرم $\alpha\pm i\beta$ خواهد داشت، در اینصورت نیز جواب معادله بصورت

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

است. پس جواب عمومی معادله

$$y_g=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}$$

خواهد بود. به کمک فرمول دموآور داریم:

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

لذا

$$y_g=e^{\alpha x}\left[c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}\right]$$

$$=e^{\alpha x}\left[c_1(\cos(\beta x)+i\sin(\beta x))+c_2(\cos(\beta x)-i\sin(\beta x))\right]$$

$$y_g = e^{\alpha x}\left[(\underbrace{C_1+C_2}_{C_1})\cos(\beta x) + (\underbrace{C_1 i - C_2 i}_{C_2})\sin(\beta x)\right]$$

پس جواب عمومی مسئله برابر است با:

$$y_g = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$$

مثال: جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را بدست آورید:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (r^2 - 3r + 2) = 0$

$$\Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \begin{cases} r = 1 \Rightarrow y_1 = e^{x} \\ r = 2 \Rightarrow y_2 = e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_g = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

2) $y'' + 2y' + y = 0 \qquad r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad (r+1)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x} \\ r = -1 \Rightarrow y_2 = xe^{-x} \end{cases} \Rightarrow y_g = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x}$$

3) $y'' + y = 0 \qquad r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm i$

$$\Rightarrow y_1 = e^{0x}\sin(x) \qquad y_2 = e^{0x}\cos(x)$$

$$y_1 = \sin(x) \qquad y_2 = \cos(x)$$

$$\Rightarrow y_g = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

4) $y'' + y' + y = 0$ $\qquad r^2 + r + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_g = e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + c_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

5) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

حل معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبه بالاتر از دو همگن :

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب ثابت وهمگن رابصورت

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

درنظر می‌گیریم. مشابه بحث قبل فرم کلی جواب را بصورت $y = e^{rx}$ درنظر می‌گیریم.

باجایگذاری y درمعادله فوق، معادله مشخصه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

(درواقع برای بدست آوردن معادله مفسر کافیست بجای $y^{(k)}$، r^k قرار دهیم).

حال بسته به اینکه ریشه های معادله مفسر متمایز، تکراری ویا مختلط باشند جوابهای

تفکیک بصورت زیر خواهد بود :

الف) چنانچه r_1، r_2، ... r_k ریشه متمایز داشته باشیم، در اینصورت جوابهای نظیر این ریشه‌ها مستقل خطی بوده، پس جوابهای نظیر آن

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad y_k = e^{r_k x}$$

است.

ب) چنانچه ریشه $r = r_1$، k بار تکرار شده باشد، به کمک فرمول آبل و روش کاهش مرتبه جواب‌های مستقل خطی نظیر برابرند با:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{r_1 x}, \quad \dots, \quad y_k = x^{k-1} e^{r x}$$

ج) چنانچه ریشه مختلط غیرتکراری $\alpha \pm i\beta$ داشته باشیم، جواب نظیر بصورت

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

است.

د) درصورتی که ریشه مختلط $\alpha \pm i\beta$، k بار تکرار شده باشد. جوابهای نظیر بصورت زیر است:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad x e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad x e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

تذکر: اگر $D = \frac{d}{dx}$، عملگر مشتق گیری باشد. در اینصورت

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

لذا معادله دیفرانسیل

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

را می توان بصورت کلی

$$L(y) = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = 0$$

نوشت و بنابراین برای نوشتن معادله مفسر کافیست جای D، r قرار دهیم.

مثال: جوابهای اساسی معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید.

الف) $(D^4 + 2D^2 + 1) y = 0$ $\qquad r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow (r^2+1)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i , \pm i$$

$$r = \pm i \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos(x) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases} \qquad r = \pm i \begin{cases} y_3 = x\cos(x) \\ y_4 = x\sin(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_g = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + C_3 x \cos(x) + C_4 x \sin(x)$$

ب) $y^{(6)} + 16 y'' = 0$ $\qquad r^6 + 16 r^2 = 0 \Rightarrow r^2 (r^4 + 16) = 0$

$$r^2 = 0 \Rightarrow r = 0, 0$$

$$r^4 + 16 = 0 \Rightarrow r^4 = -16 = 16 e^{i\pi} \Rightarrow r = 2 e^{\frac{(\pi + 2k\pi)}{4} i}$$

$$k = 0 \Rightarrow r = 2e^{\frac{\pi}{4} i} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$k = 1 \Rightarrow r = 2e^{\frac{3\pi}{4} i} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

مزدوج این ریشه‌ها نیز، ریشه مسئله هستند

$r = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$r = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

* $r = 0 \quad , \quad y_1 = e^{0x} = 1$

* $r = 0 \quad , \quad y_2 = xe^{0x} = x$

* $r = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i \Rightarrow \begin{cases} y_3 = e^{\sqrt{2}x} \cos(\sqrt{2}x) \\ y_4 = e^{\sqrt{2}x} \sin(\sqrt{2}x) \end{cases}$

* $r = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i \Rightarrow \begin{cases} y_5 = e^{-\sqrt{2}x} \cos(\sqrt{2}x) \\ y_6 = e^{-\sqrt{2}x} \sin(\sqrt{2}x) \end{cases}$

$$y_g = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{2}x} \sin(\sqrt{2}x) + C_4 e^{\sqrt{2}x} \cos(\sqrt{2}x)$$
$$+ C_5 e^{-\sqrt{2}x} \sin(\sqrt{2}x) + C_6 e^{-\sqrt{2}x} \cos(\sqrt{2}x)$$

ج) $(D-1)^2(D+2)(D-2)(D^2+1)y = 0$

$(r-1)^2(r+2)(r-2)(r^2+1) = 0$ معادله مفسر

$r = 1 \Rightarrow y_1 = e^x$

$r = 1 \Rightarrow y_2 = xe^x$

$r = -2 \Rightarrow y_3 = e^{-2x}$

$r = 2 \Rightarrow y_4 = e^{2x}$

$r = \pm i \Rightarrow y_5 = \cos(x)$

$y_6 = \sin(x)$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x} + c_5 \cos(x) + c_6 \sin(x)$$

نکته: اگر α و $-\alpha$ ریشه های معادله مفسر باشند. با توجه به اینکه

$$e^{x} = \sinh(x) + \cosh(x)$$

$$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$$

در اینصورت جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل را به جای e^{x} و e^{-x} می توان $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ درنظر گرفت.

حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و بالاتر با ضرایب ثابت و غیرهمگن:

فرض کنید معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام بصورت زیر داده شده باشد:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (1)$$

که در آن $f(x) \neq 0$. دراینصورت جواب عمومی معادله غیرهمگن فوق همانطور که قبلاً بیان کردیم بصورت $y_G = y_g + y_p$ است که در آن y_g جواب عمومی قسمت همگن و y_p یک جواب خصوصی معادله (1) است.

درادامه به معرفی سه روش جهت یافتن جواب خصوصی معادله 1 می پردازیم:

1) روش ضرایب نامعین: دراین روش باید تابع $f(x)$ به یکی از صورتهای نمایی، چندجمله‌ای سینوسی، کسینوسی و یا ضرب چندجمله‌ای در نمایی، سینوسی و کسینوسی و یا ترکیب خطی از آنها باشد.

حالت اول: اگر $f(x) = k e^{\alpha x}$ باشد: دراینصورت جواب خصوصی معادله (1) رابصورت $y_p = A x^m e^{\alpha x}$ درنظر می‌گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که α ریشه معادله مفسر بوده است. با قرار دادن y_p درمعادله مقدار A را استخراج کرده و y_p را بدست می آوریم.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر رابیابید.

$$y'' + 3y' - 4y = 2e^{2x}$$

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r+4)(r-1) = 0$$

$$\begin{cases} r = -4 \Rightarrow y_1 = e^{-4x} \\ r = +1 \Rightarrow y_2 = e^{x} \end{cases} \Rightarrow y_g = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$$