

احتمال :

تعریف آزمون تصادفی : آزمون یا فزآیندی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد و در شرایط

تکلیف ، تکرار آزمون لزوماً به نتایج یکسانی ختم نگردد ، آزمون را تصادفی می گویند . به عنوان مثال ، نتیجه پرتاب یک سکه ، انداختن یک تاس ، کشیدن یک کارت از بین یک دسته کارت ، میزان قند و خون ، آزمون های تصادفی هستند .

فضای نمونه :

مجموعه تمام حالات ممکن یک آزمون تصادفی را فضای نمونه گفته و آنرا با S نمایش می دهیم . در فضای نمونه هر حالت ممکن را یک برآمد یا یک نقطه نمونه ای گویند .

مثال : در پرتاب یک تاس وقتی عدد ظاهر شده روی آن مورد نظر است فضای نمونه برابر است با

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال : فضای نمونه در پرتاب یک سکه برابر است با :

$$S = \{T, H\} \quad H: \text{شید} \quad T: \text{خط}$$

مثال : اگر آزمون تصادفی تعیین جنسیت یک نوزاد باشد :

$$S = \{g, b\} \quad g: \text{دختد} \quad b: \text{پسر}$$

مثال : اگر آزمون تصادفی نتیجه مسابقه اسب دوانی که بین g اسب که از یک تاهفت شماره نزده شده اند باشد ، فضای نمونه بصورت زیر خواهد بود :

$$S = \{ \text{تمام حالت های } (1, 2, 3, \dots, 7) \}$$

مثلاً برآمد (4, 5, 6 و 1, 2 و 3) به این معنی است که اسب شماره دو مقام اول ، شماره سه مقام دوم و ... شماره 4 آفرشته است .

مثال: فضای نمونه ای در انداختن یک حبت تاس بصورت زیر است:

$$S = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), (6,3), \dots, (6,6) \right\}$$

مثال: اگر در بازی شیر یا خط سکه ای را سه بار پرتاب کنیم فضای نمونه بصورت زیر است:

$$S = \{ TTT, THT, TTH, HTT, HTH, HHT, THH, HHH \}$$

در مثال های بالا فضای نمونه متناهی بودند.

مثال: فضای نمونه برای آزمون پرتاب یک سکه تا زمانی که اولین شیر ظاهر شود بصورت

$$S = \{ H, TH, TTH, \dots \}$$

زیر است:

* این فضای نمونه یک فضای نمونه ای بی پایان ولی شمارای نامتناهی است.

تعریف فضای نمونه گسسته:

فضای نمونه از زمانی که مجموعه ای متناهی یا شمارای نامتناهی باشد، گسسته گوئیم و در غیر اینصورت فضای نمونه را پیوسته گوئیم.

مثال: فضای نمونه سرعت متوسط یک ماشین که از شهر A به شهر B حرکت می کند بصورت

$$S = \{ x \mid x > 0 \}$$

زیر است:

وضوحاً S در این مثال نامتناهی است پس که یک فضای نمونه پیوسته است.

تعریف سیتمد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه مانند E را یک سیتمد می گویند. معمولاً سیتمدها را با حروف بزرگ نمایش می دهیم. سیتمد یک عضوی مانند $\{c\}$ را سیتمد ساده می گویند و آنرا با همان c نمایش می دهیم. سیتمدی که پس از یک عضو داشته باشد را سیتمد مرکب می گویند. سیتمد \emptyset را محال و سیتمد S را صحتی می گویند.

مثال: سیتمد اینکه در رختن دو تاس مجموع اعداد ظاهر شده ≤ 7 باشد را بیابید.

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (5,2), (6,1)\}$$

گوئیم سیتمد E رخ می دهد هرگاه نتیجه آزمون تقارنی عضوی از مجموعه E باشد.

مثابه مجموعه های می توان اشتراک، اجتماع، تساوی، تفاضل و متمم سیتمدها را تعریف کرد.

تعریف سیتمدهای مساوی:

دو سیتمد E_1 و E_2 را مساوی می گویند هرگاه $E_1 \subset E_2$ و $E_2 \subset E_1$ ، به بیان دیگر هرگاه

وقوع E_1 ، وقوع E_2 و وقوع E_2 ، وقوع E_1 را نتیجه دهد.

تعریف اجتماع دو سیتمد:

اجتماع دو سیتمد E_1 و E_2 سیتمدی است که شامل همه اعضای E_1 و E_2 باشد. سیتمد

$E_1 \cup E_2$ رخ می دهد اگر حداقل یکی از دو سیتمد E_1 یا E_2 رخ دهد.

$$E_1 \cup E_2 = \{x \mid (x \in E_1) \vee (x \in E_2)\}$$

تعریف اشتراک دو سیاهه :

اشتراک دو سیاهه E_1 و E_2 که آنرا با $E_1 \cap E_2$ نمایش می دهند، سیاهه‌ای است که هر عنصر آن هم متعلق به سیاهه E_1 و هم متعلق به سیاهه E_2 است.

$$E_1 \cap E_2 = \{x \mid (x \in E_1) \wedge (x \in E_2)\}$$

سیاهه $E_1 \cap E_2$ برخی در E_1 و برخی در E_2 هم سیاهه E_1 و هم سیاهه E_2 رخ دهند.

تعریف سیاهه‌های ناسازگار :

دو سیاهه را ناسازگار گوئیم هرگاه اشتراک آنها تهی باشد، یعنی نتوانند همزمان رخ دهند.

مثال : سیاهه‌های E_1 و E_2 در پرتاب تاسی که به شکل زیر تعریف شده اند وضوحاً ناسازگارند :

$$E_1 = \{1, 2, 5\} \quad E_2 = \{3, 4\}$$

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

توجه : به بیان ریاضی مجموعه‌های E_1 و E_2 مجزایند.

تعریف تفاضل دو سیاهه :

تفاضل سیاهه E_2 از E_1 را با $E_1 - E_2$ نمایش می دهند و بصورت زیر تعریف می شود :

$$E_1 - E_2 = \{x \in E_1 \mid x \notin E_2\}$$

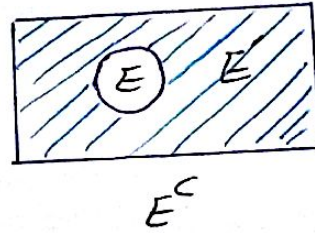
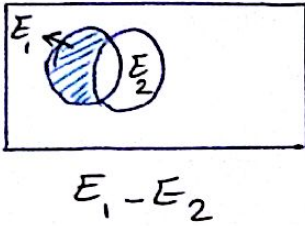
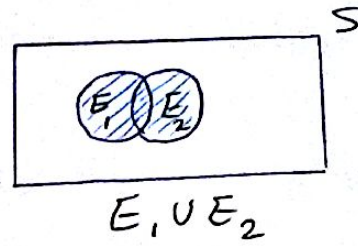
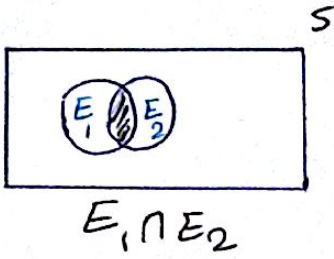
تعریف متمم یک سیاهه :

متمم سیاهه E را با E^c یا E' نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$E' = \{x \in S \mid x \notin E\} = S - E$$

$$E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2'$$

تذکرہ:



$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

قانون جابہ جایی:
بادآوری:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

قانون شرکت پذیری:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

قانون بخش پذیری:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

قانون دمولن:

تعریف احتمال:

احتمال رخ دادن یک پیامد مانند A را عددی بین 0 و 1 تعریف کرده که میزان شانس رخ دادن آن پیامد را نشان می دهد. به این صورت که هر چه این عدد بزرگ تر باشد امکان رخ دادن آن بیش تر است و هر چه به صفر نزدیک تر باشد احتمال رخ دادن آن کمتر است. تابع اندازه احتمال را با P نمایش داده و احتمال رخ دادن پیامد A را با $P(A)$ نمایش می دهیم.

اصول موضوعه احتمال: اندازه احتمال P باید در اصول موضوعه زیر صدق کند:

$$(1) P(S) = 1$$

(2) برای هر A باشد $0 \leq P(A)$

(3) اگر A_1, A_2, \dots, A_n n سیتمهای دو به دو ناسازگار (مجزا) باشند، یعنی برای هر $i \neq j$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$ ، در این صورت:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

نتایج:

$$1) P(\emptyset) = 0$$

$$\text{اثبات) } 1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$2) P(A') = 1 - P(A)$$

$$\text{اثبات) } 1 = P(S) = P(A \cup A')$$

$$= P(A) + P(A')$$

بنا بر اصل سوم

$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$$3) P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\text{اثبات) } A = (A-B) \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

اصل سوم

$$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اثبات) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \quad \text{اصل سوم}$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5) $P(A) \leq P(B)$ اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه

اثبات) $B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A)$

طبق اصل 2، $P(B - A) \geq 0$ لذا

$$P(A) \leq P(B)$$

6) $P(A) \leq 1$

با توجه به اصل (5) و اینکه $A \subseteq S$ لذا $P(A) \leq 1$

تفسیر احتمال (فضای همشانس و متناهی) : اگر فضای نمونه آزمایش تصادفی متناهی

باشد، احتمال رخ دادن هر برآمد را با هم مساوی باشند، یعنی فضای نمونه همشانس باشد

در صورت احتمال رخ دادن هر یک از A بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$N(A)$: تعداد اعضای مجموعه A

$N(S)$: تعداد اعضای فضای نمونه

مثال: دو تاس را به ترتیب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر 6 باشد چقدر است؟
 احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از 5 باشد چقدر است؟ کمتر از 8 شود چقدر؟

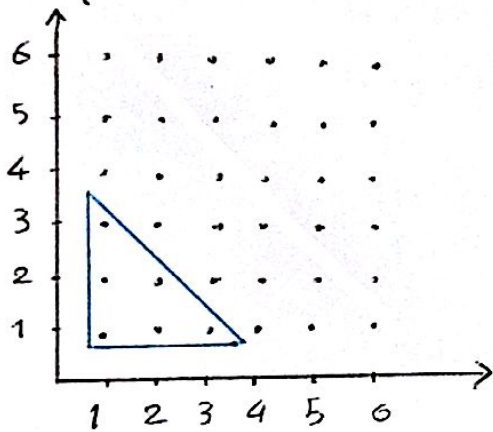
$$S = \{ (x, y) \mid x = 1, 2, \dots, 6 \text{ و } y = 1, 2, \dots, 6 \}$$

A: بشماره اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر 6 باشد

$$A = \{ (1, 5), (5, 1), (3, 3), (4, 2), (2, 4) \} \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

B: بشماره اینکه مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از 5 شود

$$B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1) \} \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$



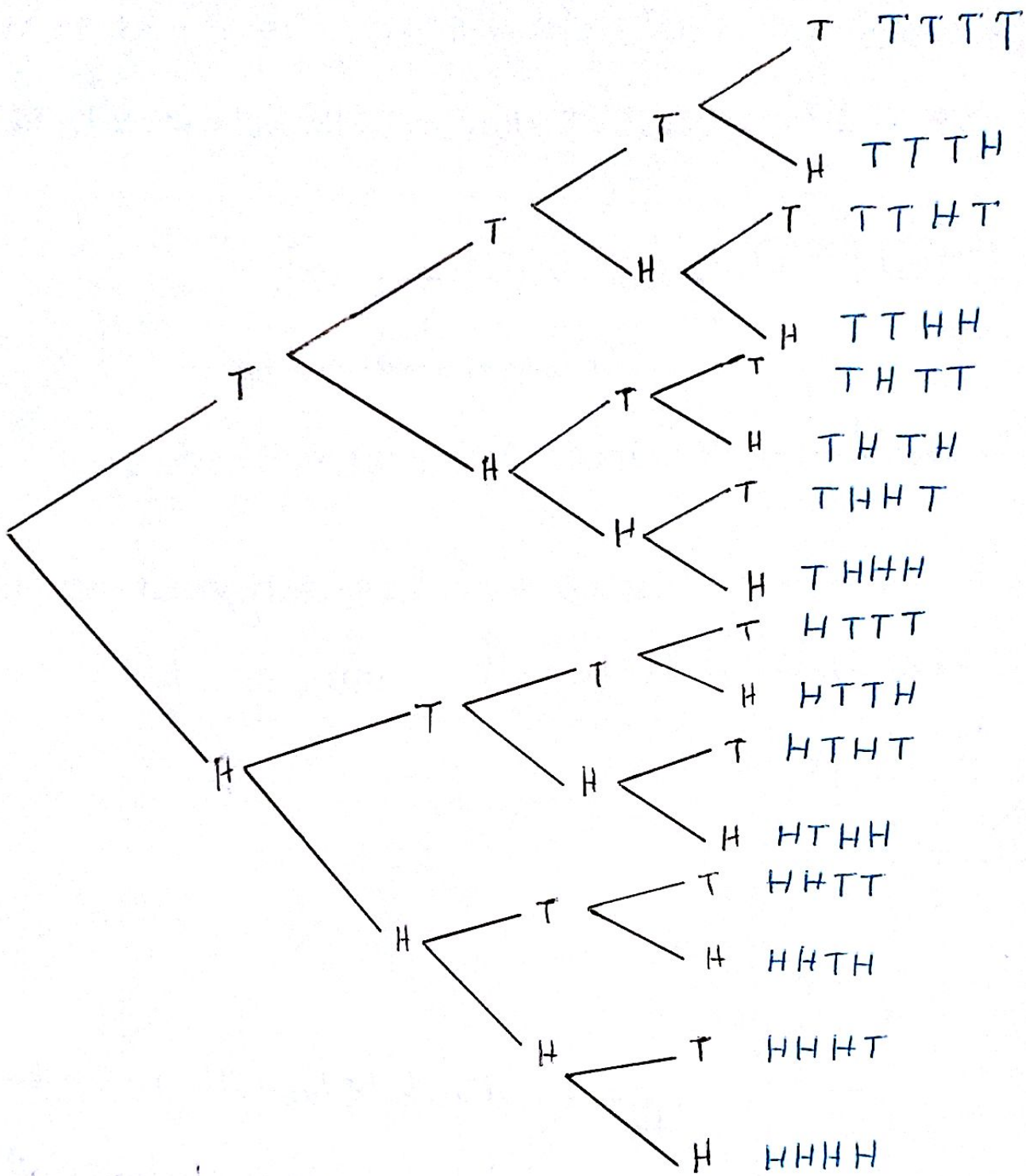
مثال: سه تاس را به ترتیب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه را بدست آورید؟

ب) احتمال اینکه دو تاس مشاهده کنیم چقدر است؟

ج) احتمال حداقل دو تاس مشاهده کنیم چقدر است؟

د) احتمال اینکه به ترتیب سه تاس مشاهده کنیم چقدر است؟



الف) $S = \{TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT\}$

ب) A: $\{TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT\}$

$A = \{TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT, TTTT\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ج) پیامد اینکه حداقل دو شیر مشاهده شود.

C: پیامد اینکه حداکثر یک شیر مشاهده کنیم

$$C' = \{TTTT, TTTH, TTHT, THTT, HTTT\}$$

$$P(C') = \frac{5}{16} \Rightarrow P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

1/2 (7)

مثال: سوال قبل را به کمک فرمول‌های شمارش حل کنید.

$$N(S) = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} = 2^4 = 16$$

(الف)

ب) A پیامد مشاهده دو شیر

$$N(A) = \binom{4}{2} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ج) C: پیامد اینکه حداقل دو شیر مشاهده کنیم

C': پیامد اینکه حداکثر یک شیر مشاهده کنیم

$$P(C') = \frac{n(C')}{n(S)} = \frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1}}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(C) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: یک کتبی 5 نفره از بین یک گروه شامل 6 مرد و 9 زن به چند طریق می‌تواند به طور کامل تقاضای انتخاب شود. احتمال اینکه این کتبی شامل 3 مرد و 2 زن باشد چقدر است؟

$$n(S) = \binom{15}{5}$$

A: پشامه اینده این کمیته از 3 مرد و 2 زن تشکیل شود

$$n(A) = \binom{6}{3} \binom{9}{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{3} \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

مثال: از بین n فرد، یک تیم k نفره کاملاً شانسی انتخاب می‌شود. احتمال اینده فرد خاصی در این تیم قرار بگیرد چقدر است؟

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$

مثال: یک تیم بسکتبال شامل 6 بازیکن سیاه پوست و 6 بازیکن سفید پوست را در نظر بگیرید. اگر 6 زوج از بین این بازیکنان به تصادف انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد که هیچ بازیکن سیاه پوستی با بازیکن سفید پوستی هم‌تیمی نشود؟

$$n(S) = \frac{\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \dots \binom{2}{2}}{6!} = \frac{12!}{(2!)^6 6!} \quad (\text{افراز نامرتب})$$

A: پشامه اینده هیچ بازیکن سیاه پوستی هم‌تیمی بازیکن سفید نشود. برای رخ دادن پشامه A باید به تیم دو نفره از بازیکنان سفید و به تیم دو نفره از بازیکنان سیاه پوست داشته باشیم. لذا چون افراز ما نامرتب است و به کمک اصل ضرب:

$$n(A) = \left(\frac{6!}{(2!)^3 3!} \right) \left(\frac{6!}{(2!)^3 3!} \right) = \left(\frac{6!}{(2!)^3 3!} \right)^2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\left(\frac{6!}{2^3 3!} \right)^2}{\left(\frac{12!}{2^6 6!} \right)} = \frac{5}{231} = 0.0216$$

مسئله: اگر n فرد در یک اتاق حاضر باشند، چقدر احتمال دارد که تولد دو نفر آنها در یک روز نباشد؟

$$n(s) = (365)^n$$

A: پیامد اینکه تولد هیچ دو فردی در یک روز سال نباشد.

$$n(A) = (365)(364)(363) \dots (365 - n + 1)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{(365)(364) \dots (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

مسئله: 3 خانم و 2 آقای صفت تسلیل می دهند. احتمال اینکه:
 الف) 3 خانم کنار هم ایستاده باشند چقدر است.
 ب) آقایان در کنار هم و خانم ها در کنار هم باشند چقدر است.

$$n(s) = (3+2)! = 5!$$

الف) A: پیامد اینکه 3 خانم کنار هم ایستاده باشند.

3 خانم را یک بسته در نظر می گیریم، لذا این بسته با 2 آقای 3! جایگشت دارد از طرفی خود خانم ها با هم 3! جایگشت دارند. پس طبق اصل ضرب

$$n(A) = 3! 3!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{3! 3!}{5!}$$

ب) خانم ها را یک بسته و آقایان را یک بسته در نظر می گیریم. لذا 2 با هم جایگشت دارند از طرفی خانم ها با هم 3! و آقایان نیز با یکدیگر 2! جایگشت دارند پس

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{3! 2! 2!}{5!}$$

مثال: 12 بلیط را بین 5 نفر طوری تقسیم می‌کنیم که به هر نفر حداقل یک بلیط برسد. احتمال اینکه به نفر دوم و سوم حداقل دو بلیط برسد چقدر است؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12 \quad \text{صحیح } x_i \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 7 \quad \text{صحیح } x_i \geq 0$$

$$n(S) = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$$

$$n(A) = ? \quad x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 5 \quad \text{صحیح } x_i \geq 0$$

$$n(A) = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} \quad P(A) = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{11}{4}}$$

مثال: در ظرفی 6 مهره مشکی و 5 مهره سفید قرار دارد. از داخل ظرف دو مهره به تصادف درمی‌آوریم. احتمال اینکه دو مهره هزنگ باشند چقدر است؟

$$n(S) = \binom{9}{2} = 36$$

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{8}{18}$$

$$n(A) = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6 + 10 = 16$$

تفسیر احتمال (به معنوم فراوانی نسبی):

یک آزمایش تصادفی را n بار تکراری کنیم، فرض کنید که خروجی هر آزمایش ارتباط و تاشی بر خروجی آزمایش‌های دیگر نداشته باشد، یعنی آزمایش‌ها به طور مستقل از هم انجام شده باشند. در این صورت احتمال رخ دادن پیامد A را به صورت حد زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

که در اینجا $n(A)$ تعداد دفعاتی است که پیامد A رخ داده است.