$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x} + c_5 \cos(x) + c_6 \sin(x)$$

نکته: اگر α و $-\alpha$ ریشه های معادله مفسر باشند. با توجه به اینکه

$$e^{\alpha x} = \sinh(\alpha x) + \cosh(\alpha x)$$

$$e^{-\alpha x} = \cosh(\alpha x) - \sinh(\alpha x)$$

در اینصورت جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل را به جای $e^{\alpha x}$ و $e^{-\alpha x}$ می توان $\sinh(\alpha x)$ و $\cosh(\alpha x)$ درنظر گرفت.

حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم و بالاتر با ضرایب ثابت و غیرهمگن :

فرض کنید معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام بصورت زیر داده شده باشد :

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (1)$$

که در آن $f(x) \neq 0$. در اینصورت جواب عمومی معادله غیرهمگن فوق همانطور که قبلاً بیان کردیم بصورت $y_G = y_g + y_p$ است که در آن y_g جواب عمومی قسمت همگن و y_p یک جواب خصوصی معادله (1) است .

در ادامه به معرفی سه روش جهت یافتن جواب خصوصی معادله 1 می پردازیم :

1) روش ضرایب نامعین : در این روش باید تابع $f(x)$ به یکی از صورتهای نمایی ، چندجمله‌ای سینوسی، کسینوسی و یا ضرب چندجمله‌ای در نمایی ، سینوسی و کسینوسی و یا ترکیب خطی از آنها باشد .

حالت اول : اگر $f(x) = ke^{\alpha x}$ باشد : در اینصورت جواب خصوصی معادله (1) را بصورت $y_p = Ax^m e^{\alpha x}$ درنظر می گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که α ریشه معادله مفسر بوده است . با قرار دادن y_p در معادله مقدار A را استخراج کرده و y_p را بدست می آوریم.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$y'' + 3y' - 4y = 2e^{2x}$$

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r+4)(r-1) = 0$$

$$\begin{cases} r = -4 \Rightarrow y_1 = e^{-4x} \\ r = +1 \Rightarrow y_2 = e^{x} \end{cases} \Rightarrow y_g = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$$

حال چون $r=2$ ریشه معادله مفسر نیست، $m=0$ لذا جواب y_p را بصورت

$$y_p = A x^0 e^{2x} = A e^{2x}$$

$$y'_p = 2A e^{2x} \quad , \quad y''_p = 4A e^{2x}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$4Ae^{2x} + 3(2Ae^{2x}) - 4Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

$$\Rightarrow (4A + 6A - 4A) = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow y_p = \frac{1}{3} e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_G = y_g + y_p = \frac{1}{3} e^{2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}$$

2 $\quad y'' + 2y' - 3y = e^{x}$

قسمت همگن معادله برابر است با

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

معادله مفسر : $r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-1) = 0$

$$\begin{cases} r = -3 \Rightarrow y = e^{-3x} \\ r = 1 \Rightarrow y = e^{x} \end{cases} \qquad y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

جواب خصوصی را به فرم $y_p = Ax^m e^x$ در نظر می‌گیریم چون 1 ریشه معادله مفسر با تکرار یک است لذا $m=1$

$$y_p = Axe^{x} \quad , \quad y'_p = Ae^{x} + Axe^{x} = Ae^{x}(x+1)$$

$$y''_p = Ae^{x} + Ae^{x} + Axe^{x} = Ae^{x}(x+2)$$

با جاگذاری در معادله داریم:

$$Ae^{x}(x+2) + 2Ae^{x}(x+1) - 3Axe^{x} = e^{x}$$

$$4Ae^{x} = e^{x} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \qquad y_p = \frac{1}{4} x e^{x} \Rightarrow y_G = y_g + y_p$$

$$= c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{4} x e^{x}$$

حالت دوم: اگر $f(x) = P_n(x)$:

دراین حالت جواب خصوصی را بصورت

$$y_p = x^m [A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n]$$

درنظر می‌گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که صفر ریشه معادله مفسر است.

مثال:

$$y'' - 3y' + 2y = x + 1$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-1) = 0$$

$$\begin{cases} r = 1 \Rightarrow e^x \\ r = 2 \Rightarrow e^{2x} \end{cases} \qquad y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = x^m [A_0 + A_1 x] = x^0 [A_0 + A_1 x] = A_0 + A_1 x$$

$$y'_p = A_1 \quad , \quad y''_p = 0$$

باجایگذاری درمعادله اصلی داریم:

$$0 - 3A_1 + 2(A_0 + A_1 x) = x + 1$$

$$\begin{cases} -3A_1 + 2A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{5}{4} \\ 2A_1 = 1 \qquad \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \Rightarrow y_G = y_g + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

حالت سوم: اگر $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$:

دراینصورت y_p را بصورت

$$y_p = x^m e^{\alpha x} (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$$

درنظر می‌گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که α ریشه معادله مفسر است.

حالت چهارم: اگر $f(x)=A\sin(\beta x)$ یا $f(x)=B\cos(\beta x)$ و یا

$f(x)=C\sin(\beta x)+D\cos(\beta x)$:

در این حالت جواب خصوصی را به صورت $y_p=x^m(A_1\sin(\beta x)+A_2\cos(\beta x))$

در نظر می‌گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که $\pm i\beta$ ریشه معادله مفسر است.

حالت پنجم: اگر $f(x)=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$ یا $f(x)=Be^{\alpha x}\cos(\beta x)$ و یا

$f(x)=e^{\alpha x}(C\sin(\beta x)+D\cos(\beta x))$:

در اینصورت جواب خصوصی را بصورت

$$y_p=x^m e^{\alpha x}(A_1\sin(\beta x)+A_2\cos(\beta x))$$

در نظر می‌گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که $(\alpha\pm i\beta)$ ریشه معادله مفسر است.

حالت ششم: اگر $f(x)$ به یکی از سه صورت زیر باشد:

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta)(x)$$

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta)(x)$$

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}(\cos(\beta x)+\sin(\beta x))$$

جواب خصوصی را به فرم

$$y_p=x^m e^{\alpha x}((A_0+A_1x+\dots+A_nx^n)\sin(\beta x)$$
$$+(B_0+B_1x+\dots+B_nx^n)\cos(\beta x))$$

در نظر می‌گیریم که در آن m تعداد دفعاتی است که $(\alpha\pm i\beta)$ ریشه‌های معادله مفسر هستند.

اصل برهم نهی جواب های خصوصی :

فرض کنید y_{p_1} و y_{p_2} و ... و y_{p_n} به ترتیب جوابهای خصوصی معادلات

$$y''+P(x)y'+q(x)y=f_1(x) \; , \; \ldots \; , \; y''+P(x)y'+q(x)=f_n(x)$$

باشند در اینصورت جواب خصوصی معادله

$$y''+P(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$

برابر است با جمع جواب های خصوصی :

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+\cdots+y_{p_n}$$

مثال : جواب معادلات زیر را بدست آورید:

① $y''+3y'+2y=5$

$r^2+3r+2=0 \qquad (r+2)(r+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=-2 \Rightarrow y_1=e^{-2x} \\ r=-1 \Rightarrow y_1=e^{-x} \end{cases}$

$y_g=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x} \qquad y_p=A_0 \quad , \; y'_p=0 \quad و \quad y''_p=0$

$\Rightarrow 2A_0=5 \Rightarrow A_0=\frac{5}{2} \Rightarrow y_G=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+\frac{5}{2}$

② $y''+3y'-10y=1+e^{x}+\sin(x)$

$r^2+3r-10=0 \qquad (r+5)(r-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=-5 & y_1=e^{-5x} \\ r=2 & y_2=e^{2x} \end{cases}$

حال جواب خصوصی معادله روبرو را محاسبه می کنیم : $\quad y''+3y'-10y=1$

$y_{p_1}=A_0 \Rightarrow y'_{p_1}=y''_{p_1}=0 \Rightarrow -10A_0=1 \Rightarrow A_0=-\frac{1}{10} \Rightarrow y_{p_1}=-\frac{1}{10}$

در گام بعد، جواب خصوصی معادله $y''+3y'-10y=e^{x}$ را محاسبه می‌کنیم.

چون 1، یک ریشه معادله مفسر نیست پس $y_{p_2}=A_{\circ}e^{x}$

$$y'_{p_2}=A_{\circ}e^{x}\ ,\quad y''_{p_2}=A_{\circ}e^{x}\Rightarrow A_{\circ}e^{x}+3A_{\circ}e^{x}-10A_{\circ}e^{x}=e^{x}$$

$$\Rightarrow -6A_{\circ}=1\Rightarrow A_{\circ}=-\frac{1}{6}\Rightarrow y_{p_2}=-\frac{1}{6}e^{x}$$

در نهایت جواب خصوصی معادله $y''+3y'-10y=\sin(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$y_{p_3}=x^{m}(A_{\circ}\sin(x)+B_{\circ}\cos(x))$$

ولی چون $\pm i$ ریشه معادله مشخصه نیست $m=0$.

$$y_{p_3}=A_{\circ}\sin(x)+B_{\circ}\cos(x)$$

$$y'_{p_3}=A_{\circ}\cos(x)-B_{\circ}\sin(x)$$

$$y''_{p_3}=-A_{\circ}\sin(x)-B_{\circ}\cos(x)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$(-A_{\circ}\sin(x)-B_{\circ}\cos(x))+3(A_{\circ}\cos(x)-B_{\circ}\sin(x))-10(A_{\circ}\sin(x)+B_{\circ}\cos(x))$$
$$=\sin(x)$$

$$(-A_{\circ}-3B_{\circ}-10A_{\circ})=1 \quad \text{ضرایب } \sin(x)$$

$$(-B_{\circ}+3A_{\circ}-10B_{\circ})=0$$

$$\begin{cases}-11A_{\circ}-3B_{\circ}=1 & \Rightarrow B_{\circ}=-\frac{3}{130}\\ -11B_{\circ}+3A_{\circ}=0 & \Rightarrow A_{\circ}=-\frac{11}{10}\end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{p_3}=-\left(\frac{11}{10}\sin(x)+\frac{3}{130}\cos(x)\right)$$

$$\Rightarrow y_G = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \left(\frac{11}{10}\sin(x) + \frac{3}{130}\cos(x)\right) - \frac{1}{6}e^{x} - \frac{1}{10}$$

③ $y'' + 4y = 8x\sin(2x)$

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \Rightarrow y_g = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$$

جواب خصوصی را بصورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$y_p = x^m\left((A_0 + A_1x)\sin(2x) + (B_0 + B_1x)\cos(2x)\right)$$

چون $r = \pm 2i$ ریشه معادله مشخصه است پس $m=1$ لذا:

$$y_p = x\left((A_0 + A_1x)\sin(2x) + (B_0 + B_1x)\cos(2x)\right)$$

$$y_p = (A_0x + A_1x^2)\sin(2x) + (B_0x + B_1x^2)\cos(2x)$$

$$y'_p = (2A_1x^2 + (2A_0 + 2B_1)x + B_0)\cos(2x)$$
$$-2\left(B_1x^2 + (B_0 - A_1)x - \frac{A_0}{2}\right)\sin(2x)$$

$$y''_p = (-4B_1x^2 + (8A_1 - 4B_0)x + 4A_0 + 2B_1)\cos(2x)$$
$$-4\left(A_1x^2 + (A_0 + 2B_1)x - \frac{A_1}{2} + B_0\right)\sin(2x)$$

با جایگذاری روابط بالا درمعادله دیفرانسیل داریم:

$$(8A_1x + 4A_0 + 2B_1)\cos(2x) - 8\left(B_1x - \frac{A_1}{4} + \frac{B_0}{2}\right)\sin(2x)$$
$$= 8x\sin(2x)$$

لذا با قرار دادن ضرایب تابع $\sin$ و $\cos$ در دو طرف معادله داریم:

$$8A_1x + 4A_0 + 2B_1 = 0$$
$$B_1x - \frac{A_1}{4} + \frac{B_0}{2} = -x$$

$$B_1 = -1 \quad , A_1 = 0 \quad , \quad B_0 = 0 \quad , A_0 = -\frac{B_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} x \sin(2x) - x^2 \cos(2x)$$

$$\Rightarrow y_G = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) - x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x)$$

4 $\quad y^{(4)} + y^{(3)} = 1 - e^{-x}$

$$r^4 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3(r+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -1 & y_1 = e^{-x} \\ r = 0 & y_2 = e^0 = 1 \\ r = 0 & y_3 = xe^0 = x \\ r = 0 & y_4 = x^2 e^0 = x^2 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 x + c_4 x^2$$

برای بدست آوردن جواب خصوصی $y^{(4)} + y^{(3)} = 1$

جواب خصوصی را بصورت $y_{p_1} = x^m A_0$ درنظر می‌گیریم که چون $r=0$ ریشه مکرر از مرتبه 3

معادله مفسر است پس $m=3$. لذا $\quad y_{p_1} = x^3 A_0$

برای قسمت $y^{(4)} + y^{(3)} = e^{-x}$ جواب خصوصی را به فرم $y_{p_2} = A_1 x^m e^{-x}$ درنظر می‌گیریم

که $m=1$. پس $y_{p_2} = A_1 x e^{-x}$ لذا طبق اصل برهم نهی:

$$y_p = A_0 x^3 + A_1 x e^{-x}$$

می‌باشد.

$$y'_p = 3A_0 x^2 + A_1 e^{-x} - A_1 x e^{-x} = 3A_0 x^2 + (1-x) A_1 e^{-x}$$

$$y''_p = 6A_0 x - A_1 e^{-x} - (1-x) A_1 e^{-x} = 6A_0 x - (2-x) A_1 e^{-x}$$

$$y^{(3)}_p = 6A_0 + (3-x) A_1 e^{-x}$$

$$y^{(4)}_p = -(4-x) A_1 e^{-x}$$

$$\Rightarrow -(4-x)A_1 e^{-x} + 6A_0 + (3-x)A_1 e^{-x} = 1 - e^{-x}$$

$$\begin{cases} -A_1 e^{-x} = -e^{-x} \Rightarrow A_1 = 1 \\ 6A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{6}x^3 + x e^{-x}$$

$$y_G = C_1 e^{x} + C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x e^{-x}$$

روش تغییر پارامتر:

برخلاف روش ضرایب نامعین، محدودیتی روی فرم قسمت ناهمگن معادله یعنی $g(x)$ نداریم و این روش قادر است جواب خصوصی معادله غیرهمگن را مشروط بر اینکه جواب عمومی قسمت همگن را داشته باشیم بدست آورد. همچنین توجه کنید که روش تغییر پارامتر برای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب غیرثابت هم کاربرد دارد.

معادله مرتبه دوم خطی $y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$ را در نظر بگیرید.

اگر جواب عمومی قسمت همگن بصورت $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ باشد، در این روش جواب خصوصی را به فرم

$$(1) \qquad y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

در نظر می‌گیریم. لذا

$$y'_p = v'_1 y_1 + v_1 y'_1 + v'_2 y_2 + v_2 y'_2$$

همچنین فرض می‌کنیم $v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0$ پس

$$(2) \qquad y'_p = v_1 y'_1 + v_2 y'_2$$

و بنابراین

$$(3) \qquad y''_p = v_1 y''_1 + v'_1 y'_1 + v_2 y''_2 + v'_2 y'_2$$

با جایگذاری روابط (1) و (2) و (3) در معادله اصلی داریم:

$$v_1 (\overbrace{y''_1 + P y'_1 + Q y_1}^{0}) + v_2 (\overbrace{y''_2 + P y'_2 + Q y_2}^{0}) + v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x)$$

چون y_1 و y_2 جواب های قسمت همگن معادله هستند لذا معادله اخیر به حالت

$$v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = R(x)$$

می‌رسد.

بنابراین در نهایت باید دستگاه زیر را حل نماییم:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \end{cases}$$

با حل این دستگاه برحسب v_1' و v_2' داریم:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

لذا خواهیم داشت:

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx \qquad v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

تعمیم روش برای معادلات خطی با ضرایب غیر ثابت:

اگر $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ جواب عمومی معادله

$$a_n(x) y^{(n)} + \cdots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

باشد، آنگاه با در نظر گرفتن جواب خصوصی بصورت:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n$$

مقادیر v_i را چنان پیدا می‌کنیم که در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f}{a_n} \end{cases}$$

با توجه به روش کرامر v_i ها بصورت زیر بدست می آید:

$$v_i = \int \frac{w_i}{w}\,dx \qquad w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$w_i = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & \frac{f}{a_n} & y_{i+1}^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال: جواب خصوصی معادله $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos^3(x)}$ را بدست آورید.

$r^2 + 2r + 2 = 0 \qquad \Delta = 4 - 8 = -4 \qquad r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow r = -1 \pm i$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x}\cos(x) \\ y_2 = e^{-x}\sin(x) \end{cases} \qquad y_g = c_1 e^{-x}\cos(x) + c_2 e^{-x}\sin(x)$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos(x) & e^{-x}\sin(x) \\ -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x) & e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2x}(\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x)) + e^{-2x}(\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x))$$

$$= e^{-2x}$$

$$V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W}\,dx = \int \frac{-e^{-x}\sin(x)\,\frac{e^{-x}}{\cos^3(x)}}{e^{2x}}\,dx = \int -\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{1}{2\cos^2(x)}$$

$$V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{w}\,dx = \int \frac{e^{-x}\cos(x)\,\frac{e^{-x}}{\cos^3(x)}}{e^{-2x}}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

$$= \int \sec^2(x)\,dx = tg(x)$$

$$\Rightarrow y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = -\frac{1}{2\cos^2(x)} e^{-x}\cos(x) + tg(x) e^{-x}\sin(x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{e^{-x}}{\cos(x)}\left(-\frac{1}{2} + \sin^2(x)\right)$$

مثال : $y'' + y = tg(x)$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y_g = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

$$V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W} dx = \int -\sin(x)\, tg(x)\, dx = \int -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} dx$$

$$= \int -\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \Big(-\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\sec(x)} + \cos(x) \Big) dx$$

$$= -\ln(|\sec(x) + tg(x)|) + \sin(x)$$

$$V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W} dx = \int \cos(x)\, tg(x)\, dx = -\cos(x)$$

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = \big(-\ln(|\sec(x) + tg(x)|) + \sin(x)\big)\cos(x)$$
$$- \cos(x) \sin(x)$$

مثال :

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' tg(x) = 1$ را بدست آورید.

قسمت همگن معادله بصورت $y'' - 2tg(x) y' = 0$ است که فاقد y است. به کمک تغییر متغیر $u = y'$ معادله فوق به صورت $u' - 2tg(x) u = 0$ درمی‌آید که معادله ای جدا شدنی است :

$$\frac{du}{u} - 2\,tg(x)\,dx = 0$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله داریم:

$$Ln(u) + 2\,ln(\cos(x)) = C_1$$

$$\Rightarrow Ln(u\cos^2(x)) = C_1 \Rightarrow u = \frac{C_1}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{C_1}{\cos^2(x)} \Rightarrow y = \int \frac{C_1}{\cos^2(x)}dx = C_1\,tg(x) + C_2$$

لذا $y_1 = tg(x)$ و $y_2 = 1$ است.

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} tg(x) & 1 \\ sec^2(x) & 0 \end{vmatrix} = -sec^2(x)$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad w_2 = \begin{vmatrix} tg(x) & 0 \\ sec^2(x) & 1 \end{vmatrix} = tg(x)$$

پس:

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{w}dx = \int \frac{-1}{-sec^2(x)}dx = \int \cos^2(x)dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2x))dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{w}dx = \int \frac{tg(x)}{-sec^2(x)}dx = -\int \sin(x)\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)tg(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow y_G = C_1\,tg(x) + C_2 + y_p$$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$$

حل:
قسمت همگن معادله $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$ است.
چون $a_1(x)+xa_0(x)=0$ ، جواب قسمت همگن برابر $y_1=x$ است. حال جواب اساسی دوم قسمت همگن را به کمک کاهش مرتبه و فرمول آبل بدست می آوریم، قبل از بکارگیری فرمول آبل، فرم معادله همگن را استاندارد می کنیم:

$$y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

$$= x\int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2-1)} dx = x\int \frac{x^2-1}{x^2} dx$$

$$= x\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+1$$

$$y_g = c_1 x + c_2(x^2+1)$$

حال برای بدست آوردن جواب خصوصی از روش تغییر پارامتر کمک می گیریم:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2-1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2+1 \\ (x^2-1)^2 & 2x \end{vmatrix} = -(x^2-1)^2(x^2+1)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (x^2-1)^2 \end{vmatrix} = x(x^2-1)^2$$

لذا

$$v_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx = \int -\frac{(x^2-1)^2(x^2+1)}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int (x^4-1)\,dx = \frac{x^5}{5} - x$$

$$v_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx = \int \frac{x(x^2-1)^2}{(x^2-1)}\,dx = \int (x^3-x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow y_p = v_1y_1 + v_2y_2 = x\left(\frac{x^5}{5} - x\right) + (x^2+1)\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$$

تمرین :

جواب عمومی معادله $y^{(3)} + y' = \sec(x)$ رابدست آورید.

روش عملگر معکوس :

در این روش معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

را به کمک عملگر $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ بصورت زیر می نویسیم :

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y = f(x)$$

با تعریف

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

معادله را می توان بصورت عملگری $L(D)y = f(x)$ نوشت . باتوجه به خواص مشتق قضیه زیر را داریم :

قضیه : (خاصیت خطی عملگر D) اگر f و g توابعی مشتق پذیر باشند

1) $D(f+g) = Df + Dg$

2) $D(\alpha g) = \alpha Dg$

3) $D^m (D^n f) = D^n (D^m f) = D^{n+m} f$

قضیه : (عملگر مشتق برای تابع نمایی)

اگر k مقداری ثابت باشد

$$L(D) e^{kx} = L(k) e^{kx}$$

اثبات: با توجه به اینکه $D^m(e^{kx}) = k^m e^{kx}$ داریم:

$$L(D)e^{kx} = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)e^{kx}$$

$$= a_n k^m e^{kx} + a_{n-1} k^{m-1} e^{kx} + \cdots + a_1 k e^{kx} + a_0 e^{kx})$$

$$= (a_n k^m + a_{n-1} k^{m-1} + \cdots + a_1 k + a_0) e^{kx}$$

$$= L(k) e^{kx}$$

مثال: مقدار $(D^3 + 3D^2 + 5D - 1)e^{3x}$ را محاسبه کنید:

$$(D^3 + 3D^2 + 5D - 1)e^{3x} = (3^3 + 3(3^2) + 5(3) - 1)e^{3x}$$

$$= (27 + 27 + 15 - 1)e^{3x} = 68e^{3x}$$

قضیه: (انتقال نمایی)

اگر f تابعی مشتق پذیر و k مقداری ثابت باشد:

$$L(D)\{e^{kx} f(x)\} = e^{kx} L(D+k) f(x)$$

اثبات:

برای اثبات، ابتدا مقدار $D^n\{e^{kx} f(x)\}$ را به کمک فرمول لایبنیتز پیدا می‌کنیم:

$$D^n\{e^{kx} f(x)\} = \sum_{m=0}^{n} (e^{kx})^{(m)} (f(x))^{(n-m)} = \sum_{m=0}^{n} k^m e^{kx} f(x)^{(n-m)}$$

$$= e^{kx} \sum_{m=0}^{n} k^m f(x)^{(n-m)} = e^{kx} (D+k)^n f(x)$$

لذا

$$L(D)\{e^{kx}f(x)\}=(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)\{e^{kx}f(x)\}$$

$$=a_nD^ne^{kx}f(x)+a_{n-1}D^{n-1}e^{kx}f(x)+\cdots+a_1De^{kx}f(x)+a_0e^{kx}f(x)$$

$$=e^{kx}a_n(D+k)^nf(x)+e^{kx}a_{n-1}(D+k)^{n-1}f(x)+\cdots+e^{kx}a_1(D+k)f(x)+a_0$$

$$=e^{kx}L(D+k)f(x)$$

مثال: عبارت $(D^2-2D+3)e^{-x}\cos(x)$ را محاسبه کنید.

$$(D^2-2D+3)e^{-x}\cos(x)=e^{-x}[(D-1)^2-2(D-1)+3]\cos(x)$$

$$=e^{-x}[D^2-2D+1-2D+2+3]\cos(x)$$

$$=e^{-x}[D^2-4D+6]\cos(x)$$

$$=e^{-x}[-\cos(x)-4\sin(x)+6\cos(x)]$$

$$=e^{-x}(5\cos(x)-4\sin(x))$$

قضیه: (عملگر مشتق برای توابع سینوس و کسینوس)

$$L(D^2)\sin(kx)=L(-k^2)\sin(kx)$$

$$L(D^2)\cos(kx)=L(-k^2)\cos(kx)$$

مثال: حاصل $(D^6+3D^4+5D^2+1)\sin(2x)$ را محاسبه کنید:

$$(D^6+3D^4+5D^2+1)\sin(2x)=((D^2)^3+3(D^2)^2+5D^2+1)\sin(2x)$$

$$=((-4)^3+3(-4)^2+5(-4)+1)\sin(2x)$$

$$=(-64+48-20+1)\sin(2x)=-35\sin(2x)$$

مثال: حاصل $(D^3+3D^2+D)\cos(2x)$ را محاسبه کنید.

$$(D.D^2+3D^2+D)\cos(2x)=(-4D+3(-4)+D)\cos(2x)$$

$$=(-3D-12)\cos(2x)=6\sin(2x)-12\cos(2x)$$

عملگر معکوس:

معکوس عملگر $L(D)$ را با $L^{-1}(D)=\frac{1}{L(D)}$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(D)\{L^{-1}(D)f(x)\}=f(x)$$

بنابراین اگر معادله دیفرانسیل بصورت

$$L(D)y=f$$

داده شده باشد. جواب خصوصی آن عبارت است از

$$y_p=\frac{1}{L(D)}f$$

واضح است که چون معکوس عملگر مشتق، انتگرال است، $\frac{1}{D}$ همان عمل انتگرال می‌باشد. همچنین $\frac{1}{D^n}$، n بار عمل انتگرالگیری بصورت مکرر می‌باشد.

در بقیه حالات باید روی $L^{-1}(D)$ با توجه به تابع f بحث شود.

امیرحسین سبحانی
99/02/07