تعریف: تابع F را یک پادمشتق تابع f روی بازه I گوییم، هرگاه برای هر $x \in I$،

$F'(x) = f(x)$.

به عنوان مثال توابع $F_1 = x^3$، $F_2 = x^3+2$ و $F_3 = x^3-5$ همگی پادمشتق های تابع $f(x) = 3x^2$ هستند. درواقع برای هر ثابت دلخواه c، تابع $F(x) = x^3+c$ یک پادمشتق تابع $f(x) = 3x^2$ است.

به همین ترتیب به ازای هر ثابت دلخواه c، تابع $F(x) = \cos(x)+c$ پادمشتق تابع $f(x) = -\sin(x)$ است چون

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[\cos(x)+c] = -\sin(x)$$

با توجه به مطلب فوق قضیه زیر را داریم:

قضیه:
اگر تابع F یک پادمشتق تابع f روی بازه I باشد، دراینصورت تابع G یک پادمشتق تابع f روی بازه I خواهد بود اگر و تنها اگر G به فرم زیر باشد:

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(x) + c$$

که دراینجا c یک مقدار ثابت است.

تعریف (انتگرال نامعین): مجموعه تمام پادمشتق های تابع $f(x)$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ گفته و با نماد $\int f(x)\,dx$ نمایش می دهند، با توجه به قضیه قبل اگر $F(x)$ یک پادمشتق تابع f باشد، دراینصورت

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

که دراینجا به c ثابت انتگرال گیری می گوییم و به $f(x)$ انتگرالده می گوییم

دستورهای اساسی انتگرال گیری : با توجه به اینکه انتگرال در واقع پاد مشتق است، فرمول های اساسی انتگرال براساس فرمول های مشتق می توان به سادگی بدست آورد که در زیر خلاصه شده اند توجه کنید که انتگرال گیری، عکس عمل مشتق گیری می باشد.

1) $\int 0\, dx = c$

2) $\int k\, dx = kx + c$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$

4) $\int \frac{1}{x} dx = Ln\,(|x|) + c$

5) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

6) $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$

7) $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$

8) $\int a^{bx} dx = \frac{1}{b\,Ln(a)} a^{bx} + c$

9) $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$

10) $\int \csc^2(x)\, dx = -\cot(x) + c$

11) $\int \sec(x)\, tg(x) dx = \sec(x) + c$

12) $\int \csc(x) \cot(x)\, dx = -\csc(x) + c$

13) $\int \sinh(x)\, dx = \cosh(x) + c$

14) $\int \cosh(x)\, dx = \sinh(x) + c$

15) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

17) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} Ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = Ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

19) $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1}(x) + c$

تذکر: انتگرال یک عملگر خطی است، یعنی اگر k یک ثابت دلخواه باشد:

$$\int (k f(x) + g(x))dx = k\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

مثال 8 انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{x^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

2) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

$$\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

3) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}\,(x+3) + C$$

4) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,tg(x)\,dx = \int \sec(x)\,tg(x)\,dx = \sec(x) + C$$

5) $\int \frac{x^3+1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\,dx$

$$\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

6) $\int \tan^2(x)\,dx$

با توجه به اینکه $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ پس

$$I = \int (\sec^2(x) - 1)\,dx$$

$$= \int \sec^2(x)\,dx - \int dx = \tan(x) - x + c$$

7) $\int (e^{3x} + \cos(x))\,dx$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} + \sin(x) + c$$

8) $\int (\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x})\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\ln|x| + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\ln(a)}a^{\pi x} + c$$

انتگرال گیری به کمک روش تغییر متغیر:

یکی از روشهای مهم در انتگرال گیری، روش تغییر متغیر می باشد که اساس آن بر قاعده زنجیره ای می باشد. طبق قاعده زنجیره‌ای مشتق تابع مرکب $f(g(x))$، بصورت زیر است:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = g'(x)f'(g(x))$$

لذا چون انتگرال عکس عمل مشتق است داریم:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + c$$

با قرار دادن $u = g(x)$، داریم $du = g'(x)\,dx$ بنابراین

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u) + c = f(g(x)) + c$$

مثال: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$I = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad \begin{cases} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x^2+1| + c$$

2) $\int \frac{\sin(3\ln(x))}{x}\,dx$

$$I = \int \frac{\sin(3\ln(x))}{x}\,dx \qquad \begin{cases} u = 3\ln(x) \\ du = \frac{3}{x}\,dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\,du \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{3}\sin(u)\,du = -\frac{1}{3}\cos(u) + c = -\frac{1}{3}\cos(3\ln(x)) + c$$

3) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

$$I = \int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx \qquad \begin{cases} u = 1+e^x \\ du = e^x\,dx \end{cases}$$

$$= \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}} + c$$

4) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

$$I = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} \qquad \begin{cases} u = x+2 \\ du = dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(u) + c = \tan^{-1}(x+2) + c$$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{e^{x}\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \qquad \begin{cases} u = e^{-x} \\ du = -e^{-x}\,dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1}(u) + c = -\sin^{-1}(e^{-x}) + c$$

6) $\int x^{2} \cos(x^3+1)\,dx$

$$I = \int x^2 \cos(x^3+1)\,dx \qquad \begin{cases} u = x^3+1 \\ du = 3x^2\,dx \\ \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3} \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{3}\cos(u)\,du = \frac{1}{3}\sin(u) + C = \frac{1}{3}\sin(x^3+1) + C$$

7) $\int x(x^2+1)^5\,dx$

$$I = \int x\,(x^2+1)^5\,dx \qquad \begin{cases} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{2}u^5\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{12}u^6 + C = \frac{(x^2+1)^6}{12} + C$$

8) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$$I = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{du}{u} \qquad \begin{cases} u = e^x+1 \\ du = e^x\,dx \end{cases}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|e^x+1| + C = \ln(e^x+1) + C$$

9) $\int \tan(x)\,dx$

$$I = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|\cos(x)| + C \qquad \begin{cases} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x)\,dx \end{cases}$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| + c = \ln |\sec(x)| + c$$

10) $\int \cot(x)\, dx$

$$I = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx \qquad \begin{cases} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\, dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sin(x)| + c$$

$$\int \tan(x)\, dx = \ln|\sec(x)| + c$$

$$\int \cot(x)\, dx = \ln|\sin(x)| + c$$

تذکر : توجه کنید که اگر $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ ، آنگاه با توجه به روش تغییر متغیر

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

مثلاً

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$$

11) $\int \sin(3x)\cos(3x)\, dx$

$$= \int \frac{1}{2} \sin(6x) = -\frac{1}{12} \cos(6x) + C$$

12) $\int \sin^5(x) \cos(x)\, dx$

$$I = \int \sin^5(x)\cos(x)\, dx \qquad \begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos(x)\, dx \end{cases}$$

$$= \int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6(x)}{6} + C$$

13) $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

$$\begin{cases} u = 1+x^2 \\ du = 2x \, dx \end{cases}$$

$$I = \int \frac{1}{2} \frac{du}{u\sqrt{1-(u-1)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{2u-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2\sqrt{\frac{2}{u}-1}}$$

حال دوباره از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} v = \frac{2}{u} - 1 \\ dv = \frac{-2}{u^2} \, du \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{4} \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{1}{4}\int v^{-\frac{1}{2}} dv = -\frac{1}{4} \frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{u}-1} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+x^2}-1} + C$$

دو انتگرال مهم مثلثاتی:

14) $\displaystyle\int \sec(x) \, dx$

$$= \int \frac{\sec(x)(\sec(x)+tg(x))}{\sec(x)+tg(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)tg(x)}{\sec(x)+tg(x)} dx$$

$$\begin{cases} u = \sec(x)+tg(x) \\ du = (\sec(x)tg(x) + \sec^2(x)) dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec(x)+tg(x)| + C$$

15) $\int \csc(x)\,dx$

$$= \int \frac{\csc(x)(\csc(x)+\cot(x))}{\csc(x)+\cot(x)}\,dx \qquad \begin{cases} u = \csc(x)+\cot(x) \\ du = (-\csc^2(x)-\csc(x)\cot(x))\,dx \end{cases}$$

$$= \int -\frac{du}{u} = -\ln|\csc(x)+\cot(x)| + C$$

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C$$

$$\int \csc(x)\,dx = \ln|\csc(x)+\cot(x)| + C$$

ودر ادامه داریم :

16) $\int \sin(x)\, e^{\cos(x)}\,dx$

$$= \int -e^u\,du = -e^u = -e^{\cos(x)} + C \qquad \begin{cases} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x)\,dx \end{cases}$$

17) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

$$= \int \frac{1}{3} e^u\,du = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{x^3} + C \qquad \begin{cases} u = x^3 \\ du = 3x^2\,dx \end{cases}$$

18) $\int \frac{\cos(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx$

$$= \int \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) + C \qquad \begin{cases} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\,dx \end{cases}$$