$$= \int \sin^4(x)\,(1-\sin^2(x))^2 \cos(x)\,dx \qquad \begin{cases} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\,dx \end{cases}$$

$$= \int u^4 (1-u^2)^2\,du = \int u^4 (1-2u^2+u^4)\,du$$

$$= \int (u^4 - 2u^6 + u^8)\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{2}{7}\sin^7(x) + \frac{\sin^9(x)}{9} + C$$

انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء :

روش جزء به جزء نتیجه‌ای از قاعده مشتق ضرب است. فرض کنید u و v دو تابع مشتق‌پذیر باشند در این صورت داریم:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

$$\Rightarrow uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (1)$$

در روش جزء به جزء انتگرالده را به ضرب دو قسمت u و dv چنان تقسیم می‌کنیم که انتگرال $\int v\,du$ ساده‌تر شود. توجه کنید که v به کمک رابطه $v = \int dv$ محاسبه می‌شود، لذا باید $\int dv$ قابل محاسبه باشد. توجه کنید که انتخاب u و dv باید مناسب باشد.

مثال: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $\int x e^x dx$

حل: با در نظر گرفتن $u=x$ و $dv=e^x dx$، داریم $du=dx$ و $v=\int e^x dx=e^x$

حال با جایگذاری در (1) داریم:

$$\int xe^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

توجه کنید که اگر $u=e^x$، $dv=x\,dx$ در نظر می‌گرفتیم، $du=e^x dx$, $v=\frac{x^2}{2}$

لذا

$$\int xe^x = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

که انتگرالی پیچیده‌تر از انتگرال داده شده است. لذا انتخاب $u=e^x$ مناسب نیست.

2) $\int x \sin(x) dx$

$$\begin{cases} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\sin(x)dx \Rightarrow v=\int \sin(x)dx \\ \qquad \Rightarrow v=-\cos(x) \end{cases}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\Rightarrow \int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

3) $\int \ln(x) dx$

$$\begin{cases} u=\ln(x) \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \Rightarrow v=\int dx = x \end{cases}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\Rightarrow \int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int dx$$

$$= x\ln(x) - x + c$$

گاهی نیاز است بیش از یکبار از انتگرال جزء به جزء استفاده کنیم:

4) $\int x^2 e^x \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x\, e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$= (x^2 - 2x + 2)\, e^x + c$$

5) $\int x \tan^{-1}(x) dx$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1}(x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\Rightarrow \int x \tan^{-1}(x)\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1}(x) - \int \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1}(x) + c$$

انتخاب u و dv : جهت انتخاب مناسب u و dv بصورت زیر عمل می کنیم :

1) اگر انتگرالده شامل ضرب چندجمله‌ای در تابع نمایی، سینوسی، کسینوسی و یا تابع دیگری که بشود از آن انتگرال گرفت باشد. u را چندجمله‌ای و بقیه عبارت را dv درنظر می‌گیریم.

2) اگر انتگرالده شامل لگاریتم، توابع معکوس مثلثاتی و یا تابعی باشد که نتوان به آسانی از آن انتگرال گرفت ولی مشتق آن ساده باشد. u را آن تابع و dv را بقیه درنظر می‌گیریم

نکته : برخی اوقات پس از انتگرال گیری جزء به جزء به انتگرال اصلی می رسیم.

به مثالهای زیر دقت کنید :

6) $\int \sec^3(x)\,dx$

$$\begin{cases} u = \sec(x) \Rightarrow du = \sec(x)\,tg(x) \\ dv = \sec^2(x) \Rightarrow v = tg(x) \end{cases} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \sec^3(x)\,dx = \sec(x)\,tg(x) - \int \sec(x)\,tg^2(x)\,dx$$

$$= \sec(x)\,tg(x) - \int \sec(x)(\sec^2(x)-1)\,dx$$

$$= \sec(x)\,tg(x) - \int \sec^3(x)\,dx + \int \sec(x)\,dx$$

$$= \sec(x)\,tg(x) + Ln|\sec(x)+tg(x)| - \int \sec^3(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3(x)\,dx = \sec(x)\,tg(x) + Ln|\sec(x)+tg(x)| + C$$

$$\Rightarrow \int \sec^3(x)\,dx = \frac{1}{2}\sec(x)\,tg(x) + \frac{1}{2}Ln|\sec(x)+tg(x)| + C$$

7) $I = \int e^{x} \cos(x)\,dx$

$$\begin{cases} u = e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx \\ dv = \cos(x) \Rightarrow v = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) \end{cases}$$

$$I = e^{x}\sin(x) - \int \sin(x)\, e^{x}\,dx \qquad \begin{cases} u = e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx \\ dv = \sin(x) \Rightarrow v = -\cos(x) \end{cases}$$

$$= e^{x}\sin(x) - \left(-e^{+x}\cos(x) - \int -\cos(x)\, e^{x}\,dx\right)$$

$$= e^{x}\sin(x) + e^{x}\cos(x) - \int \underbrace{\cos(x)\, e^{x}}_{I}\,dx + C$$

$$\Rightarrow 2I = e^{x}(\sin(x) + \cos(x)) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^{x}(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

نکته:

مهم: انتگرال جزء به جزء به کمک جدول:

محاسبه انتگرال جزء به جزء به کمک جدول مخصوص وقتی u یک چندجمله‌ای است و ما باید چندین بار از روش جزء به جزء استفاده کنیم سودمند است و محاسبات را به مراتب سریعتر می نماید. در زیر به کمک چند مثال استفاده از این روش را توضیح می دهم.

8) $I = \int x^{3} e^{2x}\,dx$

	(ا) u	($\int$) dv
$+$	x^{3}	e^{2x}
$-$	$3x^{2}$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$+$	$6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$-$	6	$\frac{1}{8}e^{2x}$
$+$	0	$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$= \frac{x^{3}}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^{2}e^{2x} + \frac{3}{4}x\,e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

$$= \left(\frac{x^{3}}{2} - \frac{3}{4}x^{2} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{2x} + C$$

9) $I = \int (x^2+2x-1)\sin(x)\,dx$

$= -(x^2+2x-1)\cos(x) + (2x+2)\sin(x)$

$+ 2\cos(x) + C$

	u	dv
+	x^2+2x-1	$\sin(x)$
−	$2x+2$	$-\cos(x)$
+	2	$-\sin(x)$
−	0	$\cos(x)$

10) $I = \int (x^3+x)\,\ln(x)\,dx$

$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \int \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$

$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \int \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)dx$

$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\ln(x) - \frac{x^4}{10} - \frac{x^2}{4} + C$

	u	dv
+	$\ln(x)$	x^3+x
−	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}$

11) $I = \int (x^2+1)\cos(x)\,dx$

$= (x^2+1)\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$

$= (x^2-1)\sin(x) + 2x\cos(x) + C$

	u	dv
+	x^2+1	$\cos(x)$
−	$2x$	$\sin(x)$
+	2	$-\cos(x)$
−	0	$-\sin(x)$

12) $I = \int e^x \cos(x)\,dx$

$I = e^x\cos(x) + \sin(x)e^x - \underbrace{\int \cos(x)\,e^x\,dx}_{I}$

$\Rightarrow 2I = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x)) + C$

	u	dv
+	$\cos(x)$	e^x
−	$-\sin(x)$	e^x
+	$-\cos(x)$	e^x