قضیه: در معادله $L(D)y = ke^{ax}$، اگر $L(a) \neq 0$ باشد،

$$y_p = \frac{1}{L(a)} k e^{ax}$$

اثبات:

$$L(D)\left(\frac{1}{L(a)} k e^{ax}\right) = \frac{k}{L(a)} L(D) e^{ax} = \frac{k}{L(a)} L(a) e^{ax} = k e^{ax}$$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 3y' + 4y = 12e^{2x}$ را بدست آورید:

$$(D^2 + 3D + 4)y = 12e^{2x}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+3D+4}(12e^{2x}) = \frac{12}{14} e^{2x} = \frac{6}{7} e^{2x}$$

قضیه: (انتقال نمایی در عملگر معکوس)

$$L^{-1}(D)\, e^{ax} f(x) = e^{ax} L^{-1}(D+a) f(x)$$

به عبارت دیگر

$$\frac{1}{L(D)} e^{ax} f(x) = e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x)$$

مثال: جواب خصوصی معادله $y'' + y' - 2y = e^{x}$ را بدست آورید.

$$(D^2 + D - 2)y = e^{x}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+D-2} e^{x} = \frac{1}{(D+2)(D-1)} e^{x}$$

همانطور که مشاهده می‌شود مقدار 1 یک ریشه $L(D)$ است

$$y_p = \frac{1}{(D-1)}\left(\frac{1}{D+2}\right)e^{x} = \frac{1}{D-1}\left(\frac{1}{1+2}\right)e^{x}$$

$$= \frac{1}{D-1}\,\frac{1}{3}e^{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{D-1}\right)e^{x}$$

$$= \frac{1}{3}\,e^{x}\left(\frac{1}{(D+1)-1}\right) = \frac{1}{3}\,e^{x}\,\frac{1}{D}\,(1) = \frac{1}{3}\,x e^{x}$$

نکته:

در معادله $L(D)y = ke^{ax}$ ، اگر $L(a)=0$ و a ریشهٔ تکراری مرتبه m ام باشد، در اینصورت

$$y_p = x^{m}\,\frac{1}{L^{(m)}(a)}\,ke^{ax}$$

مثال:

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$$

$$(D^2 - 3D + 2)y = 2e^{2x} \qquad L(2)=0$$

$$\Rightarrow L'(D) = 2D - 3 \qquad \Rightarrow L'(2) = 1$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x}{1}\,2e^{2x} = 2xe^{2x}$$

مثال:

$$(D-1)^5(D-2)(D-3)y = 6e^{x} - e^{2x}$$

$$y_p = \underbrace{\frac{1}{(D-1)^5(D-2)(D-3)}}_{(I)}\,6e^{x} - \underbrace{\frac{1}{(D-1)^5(D-2)(D-3)}}_{(II)}\,e^{2x}$$

$$= \frac{1}{(D-1)^5}\left(\frac{1}{(D-2)(D-3)}\,6e^{x}\right) - \frac{1}{D-2}\left(\frac{1}{(D-1)^5(D-3)}\,e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(D-1)^5}\,6e^{x} + \frac{1}{D-2}\,e^{2x} = \frac{6}{2}\,e^{x}\,\frac{1}{D^5} + e^{2x}\,\frac{1}{D} = \frac{3}{120}\,e^{x}x^{5} + x\,e^{2x}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+4y'+4y=20x^3e^{-2x}$ را بیابید.

$$r^2+4r+4=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=-2 \\ r_2=-2 \end{cases}$$

$$y_g=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+4D+4}20x^3e^{-2x}=20e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^2+4(D-2)+4}x^3$$

$$=20e^{-2x}\frac{1}{D^2}x^3=20e^{-2x}\left(\frac{x^5}{20}\right)=x^5e^{-2x}$$

$$y_G=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+x^5e^{-2x}$$

نکته:

$$\frac{1}{1-D}=1+D+D^2+D^3+\cdots$$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(D^2-2D-1)y=e^{2x}(x+1)$ را بیابید:

$$y_p=\frac{1}{D^2-2D-1}e^{2x}(x+1)$$

$$=e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-2(D+2)-1}(x+1)$$ (انتقال نمایی)

$$=e^{2x}\frac{1}{D^2+2D-1}(x+1)=-e^{2x}\frac{1}{1-(D^2+2D)}(x+1)$$

$$=-e^{2x}(1+(D^2+2D)+\dots)(x+1)$$ (به کمک نکته بالا)

$$=-e^{2x}[(x+1)+2]=-e^{2x}(x+3)$$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-3y'+y=x^2+1$ رابیابید.

$$y_p=\frac{1}{D^2-3D+1}(x^2+1)=\frac{1}{1-(3D-D^2)}(x^2+1)$$

$$=(1+(3D-D^2)+(3D-D^2)^2+\cdots)(x^2+1)$$

$$=(1+3D+8D^2+\cdots)(x^2+1)=x^2+1+3(2x)+8(2)$$

$$=x^2+6x+17$$

توجه کنید که در مثال فوق، صفر ریشه معادله مفسر نبود.

مثال: جواب خصوصی معادله $y''+y'=6x^2+2x$ رابیابید.

$$y_p=\frac{1}{D^2+D}(6x^2+2x)=\frac{1}{D(D+1)}(6x^2+2x)$$

$$=\frac{1}{D}(1-D+D^2-D^3+\cdots)(6x^2+2x)$$

$$=\frac{1}{D}((6x^2+2x)-(12x+2)+12)$$

$$=\frac{1}{D}(6x^2-10x+10)=2x^3-5x^2+10x$$

قضیه: اگر $L(-a^2)\neq 0$ ،

$$\frac{1}{L(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{L(-a^2)}\cos(ax+b)$$

$$\frac{1}{L(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{L(-a^2)}\sin(ax+b)$$

نتیجه: اگر $L(-a^2)\neq 0$ ، جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل به فرم

$$L(D^2)y=\sin(ax+b)$$

به صورت

$$y_p=\frac{1}{L(-a^2)}\sin(ax+b)$$

و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل به فرم

$$L(D^2)y=\cos(ax+b)$$

به صورت

$$y_p=\frac{1}{L(-a^2)}\cos(ax+b)$$

می باشد.

1) $(D^2+4)y=\sin(3x)$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{D^2+4}\sin(3x)=\frac{1}{-3^2+4}\sin(3x)$$

$$y_p=-\frac{1}{5}\sin(3x)$$

از طرفی $r^2+4=0 \Rightarrow r=\pm 2i$

$$y_g=c_1\sin(2x)+c_2\cos(2x)$$

$$y_G=y_g+y_p=c_1\sin(2x)+c_2\cos(2x)-\frac{1}{5}\sin(3x)+C$$

2) $(D^4+10D^2+9)y=\cos(2x+3)$

$$y_p=\frac{1}{D^4+10D^2+9}\cos(2x+3)=\frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)}\cos(2x+3)$$

$$=\frac{1}{(-4+1)(-4+9)}\cos(2x+3)=-\frac{1}{15}\cos(2x+3)$$

$$(r^4+10r^2+9)=0 \Rightarrow (r^2+1)(r^2+9)=0 \Rightarrow r=\pm i \quad , r=\pm 3i$$

$$y_g=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+C_3\cos(3x)+C_4\sin(3x)$$

$$y_G=y_g+y_p=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+C_3\cos(3x)+C_4\sin(3x)$$
$$-\frac{1}{15}\cos(2x+3)$$

به مثال زیر دقت کنید در این مثال عملگر بصورت $L(D^2)$ نیست.

3) $(D^2+3D-4)y=\sin(2x)$

$$r^2+3r-4=0 \Rightarrow (r-1)(r+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=1 & y_1=e^{x} \\ r_2=-4 & y_2=e^{-4x}\end{cases}$$

$$y_g=C_1e^{x}+C_2e^{-4x} \qquad\qquad y_p=\frac{1}{D^2+3D-4}\sin(2x)$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{-2^2+3D-4}\sin(2x)=\frac{1}{3D-8}\sin(2x)$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{3D+8}{9D^2-64}\sin(2x)=\frac{3D+8}{9(-4)-64}\sin(2x)$$

$$=-\frac{1}{100}(3D+8)\sin(2x)=-\frac{1}{100}(6\cos(2x)+8\sin(2x))$$

$$\Rightarrow y_G = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{50}\left(3\cos(2x) + 4\sin(2x)\right)$$

4) $(D^3+D^2+D+1)\, y = \sin(2x) + \cos(2x)$

$$y_p = \frac{1}{D^3+D^2+D+1}\left(\sin(2x) + \cos(2x)\right)$$

$$= \frac{1}{(D^2+1)(D+1)} \sin(2x) + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)} \cos(3x)$$

$$= \frac{1}{(-2^2+1)(D+1)} \sin(2x) + \frac{1}{(-3^2+1)(D+1)} \cos(3x)$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{D+1} \sin(2x) - \frac{1}{8}\,\frac{1}{D+1} \cos(3x)$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{D-1}{D^2-1} \sin(2x) - \frac{1}{8}\,\frac{D-1}{D^2-1} \cos(3x)$$

$$= -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right)(D-1) \sin(2x) - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{10}\right)(D-1) \cos(3x)$$

$$= \frac{1}{15}\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right) + \frac{1}{80}\left(-3\sin(3x) - \cos(3x)\right)$$

$(r^2+1)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = \pm i$

$$y_g = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)$$

$$y_G = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + \frac{1}{15}\left(2\cos(2x) - \sin(2x)\right)$$

$$+ \frac{1}{80}\left(-3\sin(3x) - \cos(3x)\right)$$

5) $(D^2+5D)y = e^{-2x}\cos(x)$

$$r^2+5r=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=-5 \end{cases} \qquad y_g = C_1 + C_2 e^{-5x}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+5D} e^{-2x}\cos(x)$$

طبق قضیه انتقال نمایی:

$$= e^{-2x} \frac{1}{(D-2)^2+5(D-2)} \cos(x)$$

$$= e^{-2x} \frac{1}{D^2+D-6}\cos(x) = e^{-2x}\frac{1}{-1+D-6}\cos(x)$$

$$= e^{-2x}\frac{1}{D-7}\cos(x)$$

$$y_p = e^{-2x}\frac{D+7}{D^2-49}\cos(x) = -\frac{1}{50}e^{-2x}(D+7)\cos(x)$$

$$= -\frac{1}{50}e^{-2x}(-\sin(x)+7\cos(x))$$

$$y_G = C_1 + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{50}e^{-2x}(-\sin(x)+7\cos(x))$$

مهم: وقتی $L(-a^2)=0$ وقت غیرممکن $\cos(ax+b)$ یا $\sin(ax+b)$ باشد.

6) $(D^2+9)y = \sin(3x)$

$$r^2+9=0 \Rightarrow r=\pm 3i \qquad y_g = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x)$$

با توجه به اینکه $L(-3^2)=0$ نمی‌توانیم $y_p = \frac{1}{D^2+9}\sin(3x)$ را مانند مثال‌های قبل این مسئله حل کنیم. اما می‌دانیم که:

$$\sin(3x) = \mathrm{Im}(e^{3ix})$$

یادآوری: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

پس $y_p = \frac{1}{D^2+9}\sin(3x) = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{D^2+9}e^{3ix}\right\}$

$$\xrightarrow{\text{قضیه انتقال نمایی}} y_p = \mathrm{Im}\left\{e^{3ix}\frac{1}{(D+3i)^2+9}\right\}$$

$$y_p = \mathrm{Im}\left\{e^{3xi}\frac{1}{D^2+6iD}\right\} = \mathrm{Im}\left\{e^{3xi}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D+6i}\right)\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{e^{3xi}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{6i}\right)\right\} = \mathrm{Im}\left\{e^{3xi}\frac{1}{D}\left(-\frac{i}{6}\right)\right\} = \mathrm{Im}\left\{e^{3xi}\left(\frac{-i}{6}\right)x\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{-\frac{i}{6}x(\cos(3x) + i\sin(3x))\right\} = -\frac{1}{6}x\cos(3x)$$

قضیه: در معادله دیفرانسیل $L(D)y = f(x)$، که در آن $f(x) = \sin(ax)$ یا $f(x) = \cos(ax)$ است و $L(-a^2) = L'(-a^2) = \dots = L^{(m-1)}(-a^2) = 0$ و $L^{(m)}(-a^2) \neq 0$

در اینصورت

$$y_p = x^m \frac{1}{L^{(m)}(D)} f(x)$$

مثال: معادله قبل را دوباره حل می‌کنیم:

$$(D^2+9)y = \sin(3x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2+9}\sin(3x) = x\frac{1}{2D}\sin(3x)$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\cos(3x) = -\frac{x}{6}\cos(3x)$$

قضیه انتقال خطی:

$$\frac{1}{L(D)} x f(x) = x \frac{1}{L(D)} f(x) - \frac{L'(D)}{(L(D))^2} f(x)$$

مثال: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$(D^2-9)y = x \sin(3x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-9}(x \sin(3x)) = x \frac{1}{D^2-9} \sin(3x) - \frac{2D}{(D^2-9)^2} \sin(3x)$$

$$= x \frac{1}{-3^2-9} \sin(3x) - \frac{2D}{(-9-9)^2} \sin(3x)$$

$$= \frac{-x}{18} \sin(3x) - \frac{1}{162} 3\cos(3x) = -\frac{x}{18} \sin(3x) - \frac{3}{162} \cos(3x)$$

معادله دیفرانسیل کوشی اویلر:

به طور کلی معادله دیفرانسیل مرتبه nام

$$a_n x^n y^{(n)}(x)+\cdots+a_2 x^2 y''(x)+a_1 x y'(x)+a_0 y(x)=f(x)$$

که در آن ضرایب a_i، ثابت هستند را معادله کوشی - اویلر مرتبه nام می نامند. این معادله را می توان به کمک تغییر متغیر $x=e^t$ یا $t=\ln(x)$ وقتی $x>0$ و $t=\ln(-x)$ وقتی که $x<0$، به معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل کرد، به کمک این تغییر متغیر و قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow x y'(x)=D y(t)$$

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right]=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[y''(t)-y'(t)\right]\Rightarrow x^2 y''(x)=(D^2-D)y(t)$$

$$=D(D-1)y(t)$$

به همین ترتیب با ادامه روند داریم:

$$x^k y^{(k)}(x)=D(D-1)\cdots(D-k+1)y(t)$$

بنابراین معادله کوشی اویلر به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\left[a_n D(D-1)\cdots(D-n+1)+a_{n-1}D(D-1)\cdots(D-n+2)+\cdots+a_1 D+a_0\right]y(t)$$

$$=f(e^t)$$

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

1) $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$

$$(D(D-1) + 3D+1)y = e^{2t} \Rightarrow (D^2+2D+1)y = e^{2t}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2+2D+1} e^{2t} = \frac{1}{9}e^{2t}$$

$$r^2+2r+1=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=-1 & y_1 = e^{-t} \\ r_2=-1 & y_2 = te^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_G = y_g + y_p = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$$

$$= \frac{c_1}{x} + c_2 \frac{Ln(x)}{x} + \frac{1}{9}x^2$$

2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4\,Ln(x)$

$$(D(D-1) - 2D+2)y = 4t \Rightarrow (D^2-3D+2)y = 4t$$

$$r^2-3r+2=0 \Rightarrow (r-2)(r-1)=0 \quad , \quad y_g = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

$$y_p = A_0 + A_1 t$$

$$0 - 3A_1 + 2A_0 + 2A_1 t = 4t \Rightarrow A_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$2A_0 - 3A_1 = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{3A_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow y_p = 2t+3 \Rightarrow y_G = y_g + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} + 2t+3$$

$$y_G = c_1 x + c_2 x^2 + 2Ln(x) + 3$$

3) $x^3 y^{(3)} + xy' - y = x \sin(Ln(x^2)) + x^2$

$$(D(D-1)(D-2) + D - 1)y = e^t \sin(2t) + e^{2t}$$

$$(D-1)^3 y = e^t \sin(2t) + e^{2t}$$

$$(r-1)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=1 \\ r=1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_1 &= e^t \\ y_2 &= te^t \\ y_3 &= t^2 e^t \end{aligned}$$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^3}\left(e^t \sin(2t) + e^{2t}\right) = e^t \frac{1}{D^3} \sin(2t) + e^{2t}$$

$$= \frac{e^t}{8} \cos(2t) + e^{2t} = \frac{x}{8} \cos(2 Ln(x)) + x^2$$

$$y_G = c_1 x + c_2 x Ln(x) + c_3 x Ln^2(x) + \frac{x}{8} \cos(2 Ln(x)) + x^2$$

تذکر: فرم تعمیم یافته معادله کوشی ـ اویلر در حالت کلی بصورت زیر است:

$$a_n(bx+c)^n y^{(n)} + a_{n-1}(bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1(bx+c)y' + a_0 y = f(x)$$

در این حالت کافی است از تغییر متغیر $bx+c=e^t$ یا $t=Ln(bx+c)$ استفاده کنیم و معادله را به معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل نماییم. فرم درجه دوم این معادله را لژاندر گویند.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$(2x-1)^2 y'' + 3(2x-1)y' - 2y = 0$$

$$2x-1 = e^t \Rightarrow t = \ln(2x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{2}{2x-1} \Rightarrow (2x-1)\frac{dy}{dx} = 2D\, y(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{2x-1}\frac{dy}{dt}\right] = \left[\frac{-4}{(2x-1)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{2x-1}\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt}\right]\right]$$

$$= \frac{-4}{(2x-1)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{2x-1}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-4}{(2x-1)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2^2}{(2x-1)^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$(2x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2} = 4(D^2-D)\,y(t)$$

$$\left(4(D^2-D) + 3\times 2D - 2\right)y(t) = 0 \Rightarrow (4r^2+2r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -1 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_g = c_1 e^{-t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} = \frac{c_1}{2x-1} + c_2(2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

معادله دیفرانسیل کامل مرتبه دوم :

معادله $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x)$ را کامل گوییم هرگاه $p''(x) - q'(x) + r(x) = 0$.

در این صورت معادله را بصورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)y' + (q(x) - p'(x))y\right) = s(x)$$

که با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود:

$$p(x)y' + (q(x) - p'(x))y = \int s(x)\,dx + c_1$$

مثال :

$$\underbrace{(x^3+x)}_{p(x)}\,y'' + \underbrace{(5x^2+1)}_{q(x)}\,y' + \underbrace{4x}_{r(x)}\,y = \underbrace{4x}_{s(x)}$$

$$p''(x) = 6x$$

$$p''(x) \quad q'(x) + r(x) = 6x - 10x + 4x = 0$$

لذا معادله کامل است، پس می‌توان آنرا بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dx}\left((x^3+x)y' + (5x^2+1-(3x^2+1))y\right) = 4x$$

$$(x^3+x)y' + (2x^2)y = 2x^2 + c_1$$

$$y' + \frac{2x^2}{x^3+x} y = \frac{2x^2+c_1}{x^3+x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2x^2}{x^3+x} dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1$$

$$y = \frac{1}{x^2+1} \left(\int \left(\frac{2x^2+c_1}{x^3+x}\right)(x^2+1)\, dx + c_2 \right)$$

$$= \frac{1}{x^2+1} \left(x^2 + c_1 \ln(x) + c_2 \right)$$

$$\underbrace{(x^3-1)}_{P(x)} y'' + \underbrace{6x^2}_{q(x)} y' + \underbrace{6x}_{r(x)} y = \underbrace{12x + e^x}_{s(x)}$$

$$P''(x) = 6x \qquad q'(x) = 12x$$

$$p''(x) - q'(x) + r(x) = 6x - 12x + 6x = 0$$ لذا معادله کامل است :

$$\frac{d}{dx}\left((x^3-1) y' + (6x^2 - 3x^2) y \right) = 12x + e^x$$

$$(x^3-1) y' + 3x^2 y = 6x^2 + e^x + c_1$$

$$y' + \frac{3x^2}{x^3-1} y = \frac{6x^2 + e^x + c_1}{x^3-1}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3x^2}{x^3-1} dx} = (x^3-1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^3-1} \left(\int \frac{(6x^2 + e^x + c_1)}{(x^3-1)} (x^3-1)\, dx + c_2 \right)$$

$$= \frac{1}{x^3-1} \left(\int (6x^2 + e^x + c_1)\, dx + c_2 \right) = \frac{1}{x^3-1} \left(2x^3 + e^x + c_1 x + c_2 \right)$$