انتگرال توابع گویا:

در این بخش می خواهیم به بررسی انتگرال توابع گویا، توابعی به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ هر دو چندجمله‌ای هستند، بپردازیم. همچنین فرض می کنیم درجه صورت از مخرج کمتر باشد، در غیر اینصورت، صورت کسر را بر مخرج تقسیم می کنیم تا درجه صورت از مخرج کمتر شود.

اساس این روش و مبنای نوشتن تابع گویا بصورت مجموع چند کسر ساده‌تر است که به آنها کسرهای جزئی می گوییم.

به مثال زیر جهت روشن شدن مطالب توجه کنید:

$$\int \frac{x^2+3}{x^3+3x^2-x-3}\,dx = \int \frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)(x-3)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-3} \right) dx = -\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| + C$$

روشی که در حل مثال بالا استفاده شد کاملاً وابسته به تجزیه $Q(x)$ (مخرج کسر) و نوشتن تابع گویا $\frac{P(x)}{Q(x)}$ بصورت مجموع کسرهای جزئی است.

قضیه: هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را می توان به حاصلضرب عوامل خطی و درجه دو تحویل ناپذیر ($\Delta < 0$) بیان کرد به طوری که هر عامل ضرایب حقیقی را داشته باشد.

با توجه به قضیه فوق $Q(x)$ را می توان به صورت ضرب عوامل خطی و درجه دو تحویل ناپذیر آن نوشت و طبق روشی که در قضیه بعدی می آید $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را بصورت مجموع کسرهای جزئی نوشت.

قضیه: فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هایی با ضرایب حقیقی بوده و درجه P از Q کمتر باشد در اینصورت:

الف) $Q(x)$ را می‌توان بصورت ضرب یک عدد ثابت مانند k، عوامل خطی $x-a_i$ و عوامل درجه دو تحویل ناپذیر $x^2+b_i x+c_i$ ($\Delta<0$) نوشت که ممکن است بعضی از عوامل تکراری باشند:

$$Q(x)=k(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_i)^{m_i}\ (x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{n_k}$$

ب) تابع گویای $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ می‌تواند بصورت مجموع کسرهای جزئی بصورت زیر بیان شود:

1) نظیر هر عامل به فرم $(x-a)^m$ از $Q(x)$ تجزیه شامل مجموع کسرهایی به فرم زیر خواهد بود:

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$

2) متناظر با هر عامل درجه دوم تحویل ناپذیر $(x^2+bx+c)^n$ از $Q(x)$ تجزیه شامل مجموع کسرهایی به فرم زیر می‌باشند:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)}+\dots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

ضرایب $A_1,\dots,A_m$ و $B_1,\dots,B_n$ و $C_1,\dots,C_n$ با متحد قرار دادن تابع گویا با مجموع کسرهای جزئی بدست می‌آید. به این روش، روش ضرایب نامعین یا مقایسه ضرایب می‌گویند.

در ادامه با حل چند مثال به تبیین روش می‌پردازیم:

مثال: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

1) $I = \int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx$

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{(x-3)(x-2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

با برابر قرار دادن صورت کسر در سمت چپ و راست معادله فوق داریم:

$$x+4 = (A_1+A_2)x - (2A_1+3A_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 2A_1+3A_2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A_1=7 \\ A_2=-6 \end{matrix}$$

$$I = \int \left(\frac{7}{(x-3)} - \frac{6}{x-2}\right)dx = 7\,Ln|x-3| - 6\,Ln|x-2| + C$$

$$= Ln\,\frac{|x-3|^7}{|x-2|^6} + C$$

2) $I = \int \frac{x^3+2}{x^3-x}\,dx$

$$I = \int \frac{x^3-x+x+2}{x^3-x}\,dx = \int \left(1+\frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} = \frac{A_1(x-1)(x+1)+A_2x(x+1)+A_3x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A_1x^2-A_1+A_2x^2+A_2x+A_3x^2-A_3x}{x(x-1)(x+1)}$$

با برابر قرار دادن ضرایب x^2، x و عبارت ثابت در صورت دو کسر داریم:

$A_1+A_2+A_3=0$ ضریب x^2

$A_2-A_3=1$

$-A_1=2$

$\Rightarrow A_1=-2\ ,\ A_2=\frac{3}{2}\ ,\ A_3=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I = x + \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

نکته:

اگر $(x-a)^m$ عامل $Q(x)$ باشد، جهت یافتن ضریب A_m می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$A_m = \lim_{x \to a} (x-a)^m \frac{P(x)}{Q(x)}$$

مخصوصاً وقتی $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x)$ که $Q_1(a) \neq 0$ داریم:

$$A_m = \lim_{x \to a} (x-a)^m \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} (x-a)^m \frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

به عنوان مثال در تجزیه

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$$

داریم:

$$A_1 = \left.\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}\right|_{x=0} = -2 \qquad A_2 = \left.\frac{x+2}{x(x+1)}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

به همین ترتیب داریم:

$$A_3 = \left.\frac{x+2}{x(x-1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

$$I = \int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \int \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1}\right) dx$$

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1} \qquad (*)$$

حالت اول:

$$A_2 = \lim x^2 \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1}\Big|_{x=0} = -1$$

$$A_3 = \frac{1}{x^2}\Big|_{x=1} = 1$$

چون رابطه (*) به ازای تمام x های حقیقی مقدار صدق می‌کند جهت تعیین A_1 مقداری دلخواه که البته ریشه مخرج نباشد را انتخاب کرده و با جایگزاری آن در (*) A_1 را بدست می‌آوریم

مثلاً $x=-1$:

$$-\frac{1}{2} = -A_1 + A_2 - \frac{1}{2}A_3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = -A_1 - 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = -1$$

لذا

$$I = \int\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -Ln|x| + \frac{1}{x} + Ln|x-1| + c$$

حل روش دوم:

پس از تعیین A_2 و A_3 در روش اول جهت تعیین A_1 از طرفین اتحاد پس از ضرب طرفین در x، حد در ∞ می‌گرفتیم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2(x-1)} = \lim\left(\frac{A_1 x}{x} + \frac{A_2 x}{x^2} + \frac{A_3 x}{x-1}\right)$$

$$0 = A_1 + A_3 \Rightarrow A_1 = -A_3 = -1$$

روش سوم (روش مستقیم):

$$1 = A_1 x(x-1) + A_2(x-1) + A_3(x^2)$$

$$1 = (A_1 + A_3)x^2 + (A_2 - A_1)x - A_2 \Rightarrow A_2 = -1,\ A_1 = A_2 = -1,\ A_3 = -A_1 = 1$$

4) $I = \int \frac{3x^2-2x+1}{(x-3)(x+2)(x-1)} dx$

روش اول :

$$\frac{3x^2-2x+1}{(x-3)(x+2)(x-1)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-1}$$

$$A_1 = \frac{3x^2-2x+1}{(x+2)(x-1)}\Big|_{x=3} = \frac{11}{5} \qquad A_2 = \frac{3x^2-2x+1}{(x-3)(x-1)}\Big|_{x=-2} = \frac{17}{15}$$

$$A_3 = \frac{3x^2-2x+1}{(x+2)(x-1)}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{3}$$

$$I = \int \frac{\frac{11}{5}}{x-3} dx + \int \frac{\frac{17}{15}}{x+2} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} dx$$

$$= \frac{11}{5} Ln(|x-3|) + \frac{17}{15} Ln(|x+2|) - \frac{1}{3} Ln(|x-1|) + c$$

روش دوم :

$$3x^2-2x+1 = A_1(x+2)(x-1) + A_2(x-3)(x-1) + A_3(x-3)(x+2)$$

حال مقدار ریشه های مخرج را در معادله بالا قرار می دهیم :

$$x=1 \Rightarrow 2=-6A_3 \Rightarrow A_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow 17 = 15A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{17}{15}$$

$$x=3 \Rightarrow 22 = 10A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{11}{5}$$

5) $I = \int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx$

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{2x^2-3x+3}{x(x^2-2x+1)}=\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$A_1=\lim_{x\to 0} x\,\frac{P(x)}{Q(x)}=\left.\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)^2}\right|_{x=0}=3$$

$$A_3=\lim_{x\to 1} (x-1)^2\,\frac{P(x)}{Q(x)}=\left.\frac{2x^2-3x+3}{x}\right|_{x=1}=2$$

برای تعیین A_2 مقدار $x=-1$ را در طرفین قرار می‌دهیم:

$$\frac{8}{-4}=-A_1-\frac{A_2}{2}+\frac{A_3}{4}\Rightarrow -2=-3-\frac{A_2}{2}+\frac{2}{4}\Rightarrow A_2=-1$$

$$I=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=3\operatorname{Ln}|x|-\operatorname{Ln}|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$$

6) $I=\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}+\frac{A_4}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow x^3+1=A_1(x-1)^3+A_2x(x-1)^2+A_3x(x-1)+A_4x \qquad (*)$$

$$x=0\Rightarrow 1=-A_1\Rightarrow A_1=-1$$

$$x=1\Rightarrow 2=A_4\Rightarrow A_4=2$$

برای یافتن مقدار A_3 از طرفین رابطه (*) مشتق گرفته و مقدار آن را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم. دقت شود که مشتق را باز نکنید و مطابق زیر عمل کنید:

$$3x^2 = A_1((x-1)^3)' + A_2(x(x-1)^2)' + A_3(x(x-1))' + A_4 \Big|_{x=1}$$

$$3 = 0 + 0 + A_3 + A_4 \Rightarrow 3 = A_3 + 2 \Rightarrow A_3 = 1$$

حال نقطه $x=2$ را در اتحاد (☆) قرار داده و A_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$x=2 \xRightarrow{(☆)} 9 = A_2 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4$$

$$9 = -1 + 2A_2 + 2 + 4 \Rightarrow 4 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = 2$$

$$I = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C = -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

توجه کنید که A_2 را می‌توانیم به کمک حد زیر نیز بدست آوریم:

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{P(x)}{Q(x)} = 1 = A_1 + A_2 + 0 + 0 \Rightarrow A_2 = 1 - A_1 = 2$$

و پس از بدست آوردن A_2، با قرار دادن $x=2$ در معادله (☆)، A_3 نیز بدست می‌آید.

تذکر: گرچه ما اینجا روش های مختلفی را جهت پیدا کردن ضرایب نامعین بیان کردیم، دقت کنید که روش مستقیم را می‌توان همیشه به کار برد، گرچه ممکن است زمانبر باشد.

6) $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

چندجمله ای های درجه ۲، x^2+1، x^2+4 تحویل ناپذیرند، پس

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 1 = (A_1 x + B_1)(x^2+4) + (A_2 x + B_2)(x^2+1)$$

$$1 = (A_1 + A_2)x^3 + (B_1 + B_2)x^2 + (4A_1 + A_2)x + (4B_1 + B_2)$$

1) $A_1 + A_2 = 0$

2) $B_1 + B_2 = 0 \Rightarrow B_1 = -B_2$

3) $4A_1 + A_2 = 0$

4) $4B_1 + B_2 = 1 \xrightarrow{(2)} -4B_2 + B_2 = 1 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow B_1 = \frac{1}{3}$

رابطه (1) و (3) هم نتیجه میدهد که $A_1 = A_2 = 0$ پس

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}(x) - \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

7) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$

$$\frac{(x+1)}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+x+2} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2+4x+5}$$

$$x+1 = (A_1 x + B_1)(x^2+4x+5) + (A_2 x + B_2)(x^2+x+2)$$

$$x+1 = (A_1 + A_2)x^3 + (4A_1 + B_1 + A_2 + B_2)x^2 + (5A_1 + 4B_1 + 2A_2 + B_2)x$$
$$+ (5B_1 + 2B_2)$$

با برابر قرار دادن ضرایب x^i داریم:

1) $A_1 + A_2 = 0$

2) $4A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = 0$

3) $5A_1 + 4B_1 + 2A_2 + B_2 = 1$

4) $5B_1 + 2B_2 = 1$

$\xrightarrow{(1)} A_1 = -A_2$

$\xrightarrow{(3)-(2)} A_1 + 3B_1 + A_2 = 1 \xrightarrow{(1)} B_1 = \frac{1}{3} \xrightarrow{(4)} \frac{5}{3} + 2B_2 = 1 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{3}$

$\xrightarrow{(3)-2(1)} 3A_1 + 4B_1 + B_2 = 1 \Rightarrow 3A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

$$I = \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2+4x+5} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}(x+2) + C$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}(x+2) + C$$

8) $I = \int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} dx$ (عامل درجه دوم تکراری

$$\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+2} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+2)^2}$$

$$8x^3+13x = (A_1x+B_1)(x^2+2)+(A_2x+B_2)$$

$$8x^3+13x = (A_1)x^3+B_1x^2+(2A_1+A_2)x+(2B_1+B_2)$$

با برابر قرار دادن ضرایب x^i داریم:

$$A_1=8 \,,\quad B_1=0 \,,\quad 2A_1+A_2=13 \Rightarrow A_2=-3$$

$$2B_1+B_2=0 \Rightarrow B_2=0$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{8x}{x^2+2}dx + \frac{-3x}{\underbrace{(x^2+2)^2}_{u}} = 4\,Ln\,|x^2+2| + \frac{3}{2(x^2+2)} + c$$

$$\left[\int \frac{-3x}{(x^2+2)^2}dx = -\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{u} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x^2+2)} + c\right]$$

تذکر: حتماً قبل از تجزیه به کسرهای جزئی چک کنید که مشتق مخرج در صورت ظاهر شده است یا خیر. اگر ظاهر شده بود جواب فوری به کمک Ln بدست می آید.

9) $$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-4}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{3x^2+3}{x^3+3x-4} = \frac{1}{3}Ln\,|x^3+3x-4| + c$$

تذکر: مهم

بسیاری از انتگرال ها به کمک تغییر متغیر مناسب به انتگرال تابع گویا تبدیل می شوند.

10) $$\int\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)-\sin(x)}dx \qquad u=\sin(x) \qquad du=\cos(x)dx$$

$$=\int\frac{du}{u^2-u} = \int\frac{du}{u(u-1)} = \int\left(\frac{A_1}{u}+\frac{A_2}{u-1}\right)du = \int\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}\right)du$$

$$= -Ln|u| + Ln|u-1| + C = -Ln|\sin(x)| + Ln|\sin(x)-1| + C = Ln\left(\left|\frac{\sin(x)-1}{\sin(x)}\right|\right)+C$$

11) $I = \int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+2}\,dx$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$

$= \int \frac{u+1}{u(u^2-u+2)}\,du = \int \left(\frac{A_1}{u} + \frac{A_2 u + A_3}{u^2-u+2}\right) du$

$u+1 = A_1u^2 - A_1u + 2A_1 + A_2u^2 + A_3u$

$u+1 = (A_1+A_2)u^2 + (A_3-A_1)u + 2A_1$

$\Rightarrow A_1+A_2 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 1 \quad , \quad 2A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A_2 = -A_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad A_3 = 1 + A_1 = \frac{3}{2}$

$I = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u} + \int \frac{-\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}}{u^2-u+2}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\int \frac{u-3}{u^2-u+2}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\frac{2u-6}{u^2-u+2}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{4}\int \frac{2u-1}{u^2-u+2}\,du + \frac{5}{4}\int \frac{1}{u^2-u+2}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln|u^2-u+2| + \frac{5}{4}\int \frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln|u^2-u+2| + \frac{5}{4}\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{7}}\right) + C$

$= \frac{1}{2}\ln|e^x| - \frac{1}{4}\ln|e^{2x}-e^x+2| + \frac{10}{4\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2e^x-1}{\sqrt{7}}\right) + C$

امرحسن سبحانی