تغییر متغیرهای وارون مثلثاتی:

1) انتگرال‌هایی که شامل عبارت $\sqrt{a^2-x^2}$ هستند، $(a>0)$ معمولاً به کمک تغییر متغیر زیر ساده‌تر می‌شوند:

$$x = a\sin(\theta) \quad \text{یا} \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

توجه کنید که $\sqrt{a^2-x^2}$ برای $-a \leq x \leq a$ معنادار است که معادل $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ است.

به کمک این تغییر متغیر داریم:

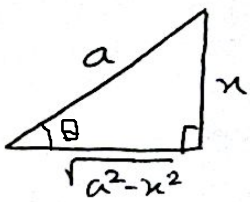
$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1-\sin^2(\theta))}$$

$$= a|\cos(\theta)| = a\cos(\theta)$$

مثال:

1) $\int \frac{1}{(5-x^2)^{3/2}}dx \qquad [x=\sqrt{5}\sin(\theta) \Rightarrow dx=\sqrt{5}\cos(\theta)d\theta]$

$$= \int \frac{\sqrt{5}\cos(\theta)d\theta}{5^{\frac{3}{2}}\cos^3(\theta)} = \frac{1}{5}\int \sec^2(\theta)d\theta = \frac{1}{5}tg(\theta)+C = \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}+C$$



2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \qquad [x=3\sin(\theta) \rightarrow dx=3\cos(\theta)d\theta]$

$$= \int \frac{3\cos(\theta)d\theta}{9\sin^2(\theta)(3\cos(\theta))} = \frac{1}{9}\int\frac{d\theta}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{9}\int \csc^2(\theta)d\theta$$

$$= -\frac{1}{9}\cot(\theta)+C = -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right)+C$$

2) انتگرال‌هایی که شامل $\sqrt{a^2+x^2}$ یا $\frac{1}{x^2+a^2}$ ($a>0$) باشند. معمولاً به کمک تغییر متغیر زیر ساده می‌شوند:

$$x = a\tan(\theta) \quad \text{یا} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

با توجه به اینکه x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. لذا $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

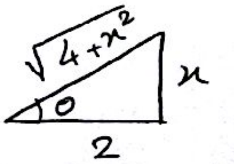
$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2(\theta))} = a|\sec(\theta)| = a\sec(\theta)$$

مثال:

3) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

$$x = 2tg(\theta) \Rightarrow dx = 2\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{2\sec^2(\theta)}{2\sec(\theta)}\,d\theta = \int \sec(\theta)\,d\theta = Ln|\sec(\theta)+tg(\theta)|+c$$



$$= Ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right|+c$$

$$= Ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right|+c$$

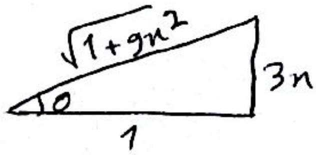
4) $\int \frac{1}{(1+9x^2)^2}\,dx$ $\quad [3x = tg(\theta) \Rightarrow 3dx = \sec^2(\theta)\,d\theta]$

$$= \int \frac{1}{3}\,\frac{\sec^2(\theta)}{\sec^4(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sec^2(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \cos^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{6}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)+c$$

$$= \frac{1}{6}(\theta+\sin(\theta)\cos(\theta))+c = \frac{1}{6}\left(\tan^{-1}(3x)+\frac{1}{6}\,\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}\right.$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}(3x)+\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+9x^2}+c$$



3) اگر انتگرال شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ ($a>0$) باشد، معمولاً انتگرال به کمک تغییر متغیر

$$x = a\sec(\theta) \quad \text{یا} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

ساده‌تر می‌شود.

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{\sec^2(\theta)-1} = a\,|tg(\theta)|$$

اگر $x \geqslant a$ $\Rightarrow 0 \leqslant \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\theta) \geqslant 0$

اگر $x \leqslant -a$ $\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) < \pi \Rightarrow \tan(\theta) \leqslant 0$

بنابراین اگر $x \geqslant a$، $\sqrt{x^2-a^2} = a\,tg(\theta)$ و اگر $x \leqslant -a$، $\sqrt{x^2-a^2} = -a\,tg(\theta)$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

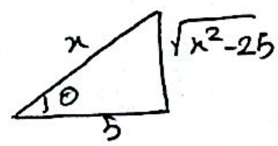
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \qquad u = x-1, \quad du = dx$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(u) + c = \sin^{-1}(x-1) + c$$

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}\,dx \qquad x>5 \qquad x = 5\sec(\theta)$

$$dx = 5\sec(\theta)\,tg(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{5\,tg(\theta)}{25\sec^2(\theta)}\,5\sec(\theta)\,tg(\theta)\,d\theta$$



$$= \int \frac{tg^2(\theta)}{\sec(\theta)}\,d\theta = \int \frac{\sec^2(\theta)-1}{\sec(\theta)}\,d\theta = \left(\int \sec(\theta) - \int \cos(\theta)\right)d\theta$$

$$= \ln|\sec(\theta)+tg(\theta)| - \sin(\theta) + c = \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| - \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} + c$$

تذکر: (تغییر متغیرهای هذلولوی)

1) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ به کمک تغییر متغیر $x = a\cosh(u)$ با فرض اینکه $x \geq a > 0$ معمولاً ساده تر می شود.

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2(u)-a^2} = a\sinh(u)$$

یادآوری:

$$\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$$

2) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2+a^2}$ یا $\frac{1}{x^2+a^2}$ به کمک تغییر متغیر $x = a\sinh(u)$ ساده تر می شوند

$$\sqrt{x^2+a^2} = a\cosh(u)$$

یادآوری:

$$\sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

3) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ به کمک تغییر متغیر $x = a\tanh(u)$ ساده تر می شود با فرض اینکه $|x| < a$.

توجه: تا زمانی که به اتحادهای توابع هذلولوی مسلط نشده اید از این تغییر متغیرها استفاده نکنید.

مثال:

7) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad [x = 3\sinh(u) \quad dx = 3\cosh(u)\,du]$

$$= \int \frac{3\cosh(u)}{27\cosh^3(u)}\,du = \frac{1}{9}\int \operatorname{sech}^2(u)\,du = \frac{1}{9}\tanh(u) + c$$

$$= \frac{1}{9}\,\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} = \frac{1}{9}\,\frac{\frac{x}{3}}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}} + c = \frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + c$$

$$\cosh^2(u) = 1+\sinh^2(u) = 1+\frac{x^2}{9} \Rightarrow \cosh(u) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$ ★

انتگرال توابع مثلثاتی :

1) $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$

حالت اول : اگر توان سینوس، عدد طبیعی فردی باشد، یک سینوس را جدا کرده و باقی عبارت را به کمک رابطه $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$ برحسب کسینوس می‌نویسیم. حال کافیست از تغییر متغیر $u=\cos(x)$ استفاده کنیم.

$$\int \sin^{2k+1}(x)\cos^n(x)\,dx=\int (\sin^2(x))^k\cos^n(x)\sin(x)\,dx$$

$$=\int(1-\cos^2(x))^k\cos^n(x)\sin(x)\,dx$$

$$=-\int(1-u^2)^k u^n\,du$$

حالت دوم : اگر توان کسینوس عدد طبیعی فردی باشد، یک کسینوس را فاکتور گرفته و باقی عبارت را به کمک رابطه $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ برحسب سینوس می‌نویسیم. حال کافیست از تغییر متغیر $u=\sin(x)$ کمک بگیریم.

$$\int \sin^m(x)\cos^{2k+1}(x)\,dx=\int \sin^m(x)\cos^{2k}(x)\cos(x)\,dx$$

$$=\int \sin^m(x)(1-\sin^2(x))^k\cos(x)\,dx$$

$$=\int u^m(1-u^2)^k\,du$$

حالت سوم : اگر توان سینوس و کسینوس هر دو عدد طبیعی زوجی باشند به کمک استفاده مکرر از روابط زیر انتگرال را به انتگرال توان‌های فردی از کسینوس تبدیل می‌کنیم.

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

مثال:

1) $\int \sin^3(x)\cos^4(x)dx$

$= \int \sin^2(x)\cos^4(x)\sin(x)dx = \int (1-\cos^2(x))\cos^4(x)\sin(x)\,dx$

$\begin{bmatrix} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x)\,dx \end{bmatrix}$

$= \int (1-u^2)u^4\,du = -\int (u^4 - u^6)du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c$

$= -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^7(x)}{7} + c$

2) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}}dx$

$= \int \frac{\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\cos(x)\,dx = \int \frac{(1-\sin^2(x))}{\sqrt{\sin(x)}}\cos(x)\,dx$

$\begin{bmatrix} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)dx \end{bmatrix}$

$= \int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}du = \int (u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}})du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$

$= 2\sqrt{u} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + c = 2\sqrt{\sin(x)} - \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}(x) + c$

3) $\int \cos^4(x)dx$

$= \int (\cos^2(x))^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x))dx = \frac{1}{4}(x + \sin(2x) + \frac{1}{2}\int (1+\cos(4x))dx$

$= \frac{1}{4}(x + \sin(2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin(4x) + c = \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin(4x) + c$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c$

$$\int \sec^m(x)\, tg^n(x)\, dx \quad (2$$

حالت اول: اگر توان سکانت عدد طبیعی زوجی باشد از یک $\sec^2(x)$ فاکتور گرفته و عبارت باقیمانده را به کمک رابطه $\sec^2(x) = 1 + tg^2(x)$ برحسب $tg(x)$ می‌نویسیم.

$$\int \sec^{2k+2}(x)\, tg^n(x)\, dx = \int (\sec^2(x))^k\, tg^n(x)\, \sec^2(x)\, dx$$

$$= \int (1+tg^2(x))^k\, tg^n(x)\, \sec^2(x)\, dx$$

$$= \int (1+u^2)\, u^n\, du \qquad \begin{bmatrix} u = tg(x) \\ du = \sec^2(x)\, dx \end{bmatrix}$$

حالت دوم: اگر توان تانژانت عدد طبیعی فردی باشد از یک $\sec(x)\, tg(x)$ فاکتور گرفته و به کمک رابطه $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$ انتگرال باقیمانده را برحسب سکانت نوشته و در نهایت از تغییر متغیر $u = \sec(x)$ کمک می‌گیریم:

$$\int \sec^m(x)\, \tan^{2k+1}(x)\, dx = \int \sec^{m-1}(x)\, (tg^2(x))^k\, \sec(x)\, tg(x)\, dx$$

$$= \int \sec^{m-1}(x)\, (\sec^2(x)-1)^k\, \sec(x)\, tg(x)\, dx$$

$$= \int u^{m-1}\, (u^2-1)^k\, du$$

حالت سوم: اگر در انتگرال سکانت نداشته باشیم و توان تانژانت عدد طبیعی زوجی باشد. از یک $tg^2(x)$ فاکتور گرفته و آن را بصورت $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$ می‌نویسیم:

$$\int \tan^n(x)\, dx = \int \tan^{(n-2)}(x)\, tg^2(x)\, dx = \int \tan^{n-2}(x)\, (\sec^2(x)-1)\, dx$$

حالت چهارم: برای محاسبه

$$\int \sec^m(x)\,dx$$

وقتی توان سکانت فرد و طبیعی باشد، از انتگرال جزء به جزء کمک میگیریم. (از مثال در بخش انتگرال جزء به جزء کمک بگیرید.)

حالت پنجم: اگر هیچکدام از روش های فوق جواب نداد، بازکردن انتگرال بالا برحسب sin و cos ممکن است کمک کند.

مثال:

1) $$\int \frac{tg^3(x)}{\sqrt{\sec(x)}}\,dx$$

$$= \int (\sec(x))^{-\frac{1}{2}} \tan^3(x)\,dx = \int (\sec(x))^{-\frac{3}{2}} \tan^2(x) \sec(x)\, tg(x)\,dx$$

$$= \int (\sec(x))^{-\frac{3}{2}} (\sec^2(x)-1) \sec(x)\, tg(x)\,dx$$

$$= \int \left[(\sec(x))^{\frac{1}{2}} - (\sec(x))^{-\frac{3}{2}}\right] \sec(x)\, tg(x)\,dx$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{3}{2}})\,du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} (\sec(x))^{\frac{3}{2}} + 2(\sec(x))^{-\frac{1}{2}} + c$$

2) $$\int \sec^4(3x)\, tg^3(3x)\,dx$$

$$= \int \sec^2(3x)\, tg^3(3x) \sec^2(3x)\,dx = \int (1+tg^2(3x))\, tg^3(3x) \sec^2(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (1+u^2)u^3\,du = \frac{1}{3}\int (u^3+u^5)\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4}+\frac{u^6}{6}\right)+c \qquad \left[\begin{array}{l} u = tg(3x) \\ du = 3\sec^2(x)dx \end{array}\right]$$

$$= \frac{tg^4(3x)}{12} + \frac{tg^6(3x)}{18} + c$$

3) $\int \tan^4(x)\,dx$

$$= \int \tan^2(x)\left(\sec^2(x)-1\right)dx = \int \tan^2(x)\sec^2(x) - tg^2(x)\,dx$$

$$= \frac{\tan^3(x)}{3} - \tan(x) + x + C$$

4) $\int \frac{\sec(x)}{\tan^2(x)}\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2 dx = \int (\sin(x))^{-2}\cos(x)\,dx \qquad \begin{bmatrix} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \int u^{-2}\,du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\sin(x)} + C = -\csc(x) + C$$

انتگرال های شامل کمان های متفاوت از سینوس و کسینوس:

برای انتگرال گرفتن از این توابع از اتحادهای زیر کمک می گیریم:

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right]$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)\right]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\right]$$

مثال:

$$\int \sin(5x)\cos(4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin(x) + \sin(9x)\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\cos(x) - \frac{\cos(9x)}{9}\right) + C$$

تغییر متغیر گویا ساز:

اگر انتگرالده به صورت کسری به فرم $R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right)$ باشد، به کمک تغییر متغیر $x = t^m$ که در آن m کوچکترین مضرب مشترک $q_1, \dots, q_k$ است، می‌توان انتگرال را به انتگرال یک تابع گویا رساند.

به همین ترتیب اگر انتگرالده به صورت $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)$ باشد، به کمک تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ که m مضرب مشترک $q_1, \dots, q_k$ است، می‌توان انتگرال را به انتگرال تابع گویا رساند.

مثال:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

$x = t^m \quad , m = 6 \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\, dt$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t + 6\ln|t+1| + c$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + c$$

2) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx \qquad \frac{1+x}{1-x} = t^2$

$$\Rightarrow 1+x = t^2 - xt^2 \Rightarrow x(1+t^2) = t^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{4t\, dt}{(t^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{4t^3}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{t+1} + \frac{A_4}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$= \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + c$$

$$= \ln\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) - \frac{2t}{t^2-1} + c \quad = \ln\left(\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|\right) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

3) $\int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}\,dx$

$$2x-3 = t^6 \Rightarrow 2dx = 6t^5dt \Rightarrow dx = 3t^5dt$$

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1}\,3t^5dt = 3\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt$$

$$= 3\int\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 3\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + tg^{-1}(t)\right)$$

$$= 3\left(\frac{(2x-3)^{7/6}}{7} - \frac{(2x-3)^{5/6}}{5} + \frac{(2x-3)^{3/6}}{3} - (2x-3)^{1/6} + tg^{-1}\left((2x-3)^{1/6}\right)\right) + c$$

4) $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

$$\frac{2-x}{2+x} = t^3 \Rightarrow 2t^3 + xt^3 = 2-x \Rightarrow x(t^3+1) = 2-2t^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{2(1-t^3)}{1+t^3} \Rightarrow 2-x = \frac{2t^3-2+2+2t^3}{1+t^3} = \frac{4t^3}{1+t^3}$$

$$dx = \frac{2(-3t^2)(1+t^3) - 3t^2(1-t^5)}{(1+t^3)^2}dt = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$\Rightarrow I = 2\int \frac{(1+t^3)^2}{(4t^3)^2} \times t \times \frac{(-12t^2)}{(1+t^3)^2}dt = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{3}{2}\frac{t^{-2}}{2} = -\frac{3}{4t^2} + C$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^4(x+2)^4 \frac{x+2}{x-1}}} = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}$$

$$\frac{x+2}{x-1} = t^4 \Rightarrow x+2 = xt^4 - t^4 \Rightarrow x(1-t^4) = -(t^4+2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2+t^4}{t^4-1} \Rightarrow dx = \frac{4t^3(t^4-1) - 4t^3(2+t^4)dt}{(t^4-1)^2} = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt$$

$$\Rightarrow I = -\int \frac{(t^4-1)}{3t^4} \times \frac{(t^4-1)}{3} \times \frac{1}{t} \times \frac{12t^3}{(t^4-1)^2}dt$$

$$= -\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3}\frac{1}{t} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$$

$$\left[x-1 = \frac{3}{t^4-1}, \quad x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1}\right]$$

انتگرال گیری از دوجمله‌ای دیفرانسیلی:

انتگرال $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ ، که در آن m, n, p اعداد گویایی هستند، فقط در سه حالت زیر با انتگرال توابع مقدماتی بیان می‌شود:

حالت I : p عددی صحیح است. اگر $p>0$ ، پرانتز را به وسیله دوجمله‌ای نیوتن بسط می‌دهیم ولی اگر $p<0$ ، در اینصورت فرض می‌کنیم $x=t^k$ که k مخرج مشترک m و n است.

حالت II : $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح است. فرض می‌کنیم $a+bx^n=t^\alpha$ که α مخرج کسر p است.

حالت III : $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح است، فرض می‌کنیم $a+bx^n=t^\alpha x^n$ که α مخرج کسر p است.

مثال:

1) $\int \sqrt[3]{x}\,(2+\sqrt{x})^2 dx$ $\quad , p=2$

$= \int x^{\frac{1}{3}} (2+x^{\frac{1}{2}})^2 dx = \int x^{\frac{1}{3}} (4+4x^{\frac{1}{2}}+x) dx$

$= \int x^{4/3} + 4x^{5/6} + 4x^{1/3} dx = \frac{3}{7} x^{7/3} + \frac{24}{11} x^{11/6} + 3x^{4/3} + c$

2) $\int x^{-\frac{2}{3}} (1+x^{\frac{2}{3}})^{-1} dx$

$x = t^3$

$= \int t^{-2} (1+t^2)^{-1} (3t^2) dt = 3\int \frac{1}{1+t^2} dt = 3tg^{-1}(t)+c$

$= 3tg^{-1}\sqrt[3]{x} + c$

3) $\int x^{-\frac{2}{3}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx$

$p = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$

$\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$ $\qquad 1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2$

$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = 2t\, dt$

$I = 3\int t \times 2t\, dt = 6\int t^2 dt = 2t^3 + C = \frac{3}{2}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + C$

4) $\int x^{-11} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx$

$m = -11$ $\qquad n = 4$ $\qquad p = -\frac{1}{2}$

$\frac{m+1}{n} = \frac{-10}{4} = -2.5$ $\qquad \frac{m+1}{n} + p = -3$

$1 + x^4 = t^2 x^4 \Rightarrow (t^2-1) x^4 = 1 \Rightarrow x = (t^2-1)^{-\frac{1}{4}}$

$dx = -\frac{1}{4} \times (2t)(t^2-1)^{-\frac{5}{4}} dt$

$I = -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^{\frac{11}{4}} \left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{t\, dt}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}$

$= -\frac{1}{2} \int (t-1)^2 dt = -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C$

انتگرال توابع گویا از sin و cos: اگر انتگرالده به صورت تابع گویایی از $\sin(\theta)$ و $\cos(\theta)$ بود، به کمک تغییر متغیر $x=\tan(\frac{\theta}{2})$ می‌توان انتگرال را به انتگرال یک تابع گویا رساند.

$$x=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{\sec^2(\frac{\theta}{2})}=\frac{1}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}=\frac{1}{1+x^2}$$

با توجه به اینکه

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\cos(\theta)\right)$$

لذا:

$$\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sin(\theta)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$dx=\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow d\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)dx=\frac{2dx}{1+x^2}$$

به طور خلاصه:

$$x=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\theta)=\frac{1-x^2}{1+x^2},\qquad \sin(\theta)=\frac{2x}{1+x^2},\qquad d\theta=\frac{2dx}{1+x^2}$$

مثال:

1) $\int\frac{1}{2+\cos(\theta)}d\theta \qquad x=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$=\int\frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{2+\frac{1-x^2}{1+x^2}}=2\int\frac{1}{3+x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+C$$

2) $\int \frac{dx}{3\sin(x)+2\cos(x)+2}$

$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \int \frac{1}{\frac{6u}{1+u^2}+2\frac{1-u^2}{1+u^2}+2} \frac{2}{1+u^2}\,du$

$= \int \frac{2}{6u+2(1-u^2)+2(1+u^2)}\,du = \int \frac{du}{3u+2} = \frac{1}{3}\ln|3u+2|+c$

$= \frac{1}{3}\ln\left|3\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2\right|+c$

3) $\int \frac{1-\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx$

$u = \tan\left[\frac{x}{2}\right]$

$= \int \frac{1-\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\,du$

$= \int \frac{1+u^2-2u}{1+u^2}\,du = \int\left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right)du = u - \ln|1+u^2|+c$

$= \tan\frac{x}{2} + \ln\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$