## تبدیل لاپلاس :

**تعریف :** فرض کنید تابع $f(x)$ برای $x>0$ داده شده باشد، در اینصورت تبدیل لاپلاس تابع $f$ در صورت وجود که با $F(s)$ یا $\mathcal{L}\{f\}$ نمایش داده می‌شود، بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

توجه کنید که انتگرال بالا، یک انتگرال ناسره می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌گردد.

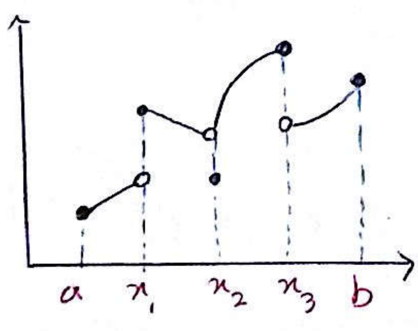
$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-sx} f(x)\,dx$$

اگر حد بالا موجود باشد انتگرال فوق را همگرا و در غیراینصورت واگرا می‌نامیم.

**تذکر :** با توجه به اینکه عملگر انتگرال، یک عملگر خطی است لذا تبدیل لاپلاس نیز تبدیل خطی می‌باشد یعنی

$$\mathcal{L}\{a f(x) + b g(x)\} = a\,\mathcal{L}\{f(x)\} + b\,\mathcal{L}\{g(x)\}$$

**تعریف (تابع قطعه‌ای پیوسته) :** گوییم تابع $f$ روی بازه $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته است، هرگاه حداکثر در تعدادی متناهی نقطه در این بازه ناپیوستگی جهشی داشته باشد.



قضیه:

فرض کنید تابع $f$ برای هر $A>0$، روی بازه $[0, A]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، همچنین فرض کنید ثابت های $a$، $k$ و $M$، که در آن $k, M>0$، چنان موجود باشند که

$$\forall x \geq M: \quad |f(x)| \leq k e^{ax}$$

دراینصورت تبدیل لاپلاس $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ برای $s>a$ موجود است.

تذکر 1: دراین فصل ما روی توابعی بحث می کنیم که درشرایط قضیه فوق صدق کنند، یعنی توابع قطعه‌ای پیوسته‌اند وقتی $x$ به سمت بی نهایت میل پیدا می کنند از مرتبه نمایی هستند.

تذکر 2: ممکن است تابعی در قضیه فوق صدق نکند ولی تبدیل لاپلاس آن موجود باشد.

درادامه تبدیل لاپلاس برخی از توابع مقدماتی را محاسبه می نماییم.

مثال 1: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=1$:

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-sx}\,dx=-\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^\infty=0-\left(-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$$

مثال 2: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=e^{ax}$:

$$\mathcal{L}\{e^{ax}\}=\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}\,dx=\int_0^\infty e^{-(s-a)x}\,dx=-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x}\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{s-a}, \quad s>a$$

مثال 3: تبدیل لاپلاس توابع سینوسی و کسینوسی:

برای تبدیل لاپلاس تابع $\sin(ax)$ و $\cos(ax)$ از رابطه اویلر کمک می گیریم:

$$e^{iax}=\cos(ax)+i\sin(ax)$$

$$\mathcal{L}\{e^{iax}\} = \mathcal{L}\{\cos(ax)\} + i\,\mathcal{L}\{\sin(ax)\} \qquad (1)$$

اما با توجه به مثال (2) داریم:

$$\mathcal{L}\{e^{iax}\} = \frac{1}{s-ia} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\,\frac{a}{s^2+a^2} \qquad (2)$$

با مقایسه (1) و (2) و برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\mathcal{L}\{\cos(ax)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \mathcal{L}\{\sin(ax)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال 4: تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = 5e^{-2x} - 3\sin(4x)$ را بیابید.

$$\mathcal{L}\{f\} = 5\,\mathcal{L}\{e^{-2x}\} - 3\,\mathcal{L}\{\sin(4x)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}$$

مثال 5: تبدیل لاپلاس تابع $\sinh(ax)$ و $\cosh(ax)$:

$$\mathcal{L}\{\cosh(ax)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{ax}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad |s| > |a|$$

$$\mathcal{L}\{\sinh(ax)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{ax}\} - \mathcal{L}\{e^{-ax}\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad |s| > |a|$$

مثال 6: تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x^n$ برای $n > -1$:

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx \qquad \begin{cases} u = sx \\ du = s dx \Rightarrow dx = \frac{du}{s} \end{cases}$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{s} du$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

اگر $n$ صحیح باشد:

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

یادآوری:

تابع گاما به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

خواص تابع گاما:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$\Gamma(n+1) = n!$ اگر $n$ عدد صحیح مثبت باشد

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال 7: تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ را بدست آورید:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

جدول فرمول‌های مقدماتی

لاپلاس:

| | $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s)=\mathcal{L}\{f(x)\}$ |
|---|---|---|
| 1 | $1$ | $\frac{1}{s}$ $\quad s>a$ |
| 2 | $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ $\quad s>a$ |
| 3 | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad s>0$ |
| 4 | $t^p \quad p>-1$ | $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ $\quad s>0$ |
| 5 | $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ $\quad s>0$ |
| 6 | $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ $\quad s>0$ |
| 7 | $\sinh(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ $\quad s>\|a\|$ |
| 8 | $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ $\quad s>\|a\|$ |

همانطور که در جدول مقدماتی تبدیلات لاپلاس در بالا مشاهده می‌شود، $\lim_{s\to\infty} F(s)=0$ این موضوع اتفاقی نیست و قضیه زیر این خاصیت را تضمین می‌کند.

قضیه:

اگر $f$ تابعی قطعه‌ای پیوسته روی $[0,\infty)$ و از مرتبه نمایی باشد، در اینصورت

$$\lim_{s\to\infty} F(s)=\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(x)\}=0$$

نتیجه:

اگر $\lim_{s\to\infty} F(s)\neq 0$، تابعی مانند $f(x)$ نمی‌توان پیدا کرد که تبدیل لاپلاس آن $F(s)$ باشد یعنی مثلاً تابعی وجود ندارد که تبدیل لاپلاس آن $e^s$، $\sin(s)$ یا $\frac{s-1}{s+1}$ باشد، در حالت خاص اگر لاپلاس یک تابع، تابع گویا باشد، درجه مخرج از صورت باید بیشتر باشد.

تعریف: اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ باشد، درانصورت $f(x)$ را لاپلاس معکوس $F(s)$ نامیده

و
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(x)$$

به عنوان مثال چون $\mathcal{L}\{\sin(x)\}=\frac{1}{s^2+1}$، پس $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}=\sin(x)$

سؤالی که اینجا ذهن را درگیر می کند این است که آیا لاپلاس معکوس منحصربفرد است؟ آیا ممکن است لاپلاس دو تابع متفاوت مقدار یکسانی داشته باشند؟ قضیه لرچ این موضوع را برای ما تا میزان بالایی مشخص می کند.

قضیه (لرچ):

تبدیل لاپلاس دو تابع پیوسته متمایز روی $[0,\infty)$ متمایز است.

نتیجه:

اگر $f$ و $g$ دو تابع پیوسته باشند و $\mathcal{L}\{f\}=\mathcal{L}\{g\}$، درانصورت $f=g$.

این بدان معناست که اگر ما خودمان را به فضای توابع پیوسته محدود کنیم درانصورت تبدیل معکوس
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

به صورت منحصربفردی تعریف می شود، اما اگر $f$ و $g$ پیوسته نباشند قضیه زیر را داریم:

قضیه:

فرض کنید $f$ و $g$ دو تابع از مرتبه نمایی باشند و $\mathcal{L}\{f\}=\mathcal{L}\{g\}$ درانصورت رابطه $f(t)=g(t)$ برای همه $t>0$ که $f$ و $g$ هردو در آن پیوسته باشند، صادق است

نکته: با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است، تبدیل لاپلاس معکوس نیز یک تبدیل خطی می باشد یعنی اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ و $\mathcal{L}\{g(x)\}=G(s)$ درانصورت
$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta(G(s))\}=\alpha f(x)+\beta g(x)$$

اثبات:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x)+\beta (g(x))\}=\alpha \mathcal{L}\{f(x)\}+\beta \mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$=\alpha F(s)+\beta G(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s)+\beta G(s)\}=\alpha f(x)+\beta g(x)$$

قضیه (لاپلاس مشتق):

فرض کنید $f$ تابعی پیوسته و از مرتبه نمایی روی بازه $(0,\infty)$ و $f'$ تابعی قطعه‌ای پیوسته روی $[0,\infty)$ باشد، در اینصورت

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}=s\mathcal{L}\{f(x)\}-f(0^+)$$

اثبات:

$$\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ T\to\infty}}\int_\delta^T e^{-sx}f'(x)dx$$

$$=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ T\to\infty}}\left[e^{-sx}f(x)\Big|_\delta^T+s\int_\delta^T e^{-sx}f(x)dx\right]$$

$$=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ T\to\infty}}\left[e^{-sT}f(T)-e^{-s\delta}f(\delta)+s\int_\delta^T e^{-sx}f(x)dx\right]$$

$$=s\mathcal{L}\{f(x)\}-f(0^+)$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $\sin^2(2x)$ را محاسبه کنید.

توجه کنید که ما روشی جهت محاسبه لاپلاس $\sin^2(2x)$ ارائه نکردیم ولی لاپلاس مشتق آن را می‌شناسیم:

$$f(x) = \sin^2(2x)$$

$$f'(x) = 4\sin(2x)\cos(2x) = 2\sin(4x)$$

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\,\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+)$$

$$\Rightarrow 2\,\mathcal{L}\{\sin(4x)\} = s\,\mathcal{L}\{\sin^2(2x)\} - 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin^2(2x)\} = \frac{2}{s}\,\mathcal{L}\{\sin(4x)\} = \frac{2}{s}\,\frac{4}{s^2+16}$$

حال به محاسبه $\mathcal{L}\{f''(x)\}$ می‌پردازیم و فرض می‌کنیم که $f$ و $f'$ در شرایط مشابهی که برای $f'$ و $f$ در قضیه قبل وضع شده است صدق کنند:

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s\,\mathcal{L}\{f'(x)\} - f'(0^+)$$

$$= s\left(s\,\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+)\right) - f'(0^+)$$

$$= s^2\,\mathcal{L}\{f(x)\} - s\,f(0^+) - f'(0^+)$$

نتیجه:

فرض کنید $f$ و $f'$ و ... و $f^{(n-1)}$ توابعی پیوسته روی $(0,\infty)$ و از مرتبه نمایی باشند، همچنین $f^{(n)}$ تابعی قطعه‌ای پیوسته روی $[0,\infty)$ باشد، در اینصورت:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n\,\mathcal{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

قضیه:

فرض کنید $f$ تابعی پیوسته روی $[0,\infty)$ باشد، مگر در نقاط $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ و ناپیوستگی $f$ در نقاط $t_i$، $i = 1, \dots, n$ ناپیوستگی جهشی باشد. همچنین $f$ تابعی از مرتبه نمایی با مشتق قطعه‌ای پیوسته باشد در اینصورت:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\,\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0) - \sum_{i=1}^{n} e^{-st_i}\left(f(t_i^+) - f(t_i^-)\right)$$

در مثال های زیر کاربرد تبدیل لاپلاس جهت حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه را می بینیم.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل زیر را که در شرایط اولیه ارائه شده صدق می کند بیابید

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$$

گام اول: از طرفین معادله بالا لاپلاس می گیریم.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

گام دوم: از فرمول لاپلاس مشتق استفاده می کنیم.

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0) - (s\,\mathcal{L}\{y\} - y(0)) - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

گام سوم: به کمک رابطه بالا مقدار $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$ را محاسبه می کنیم:

$$s^2 Y(s) - s - 0 - (s\,Y(s) - 1) - 2Y(s) = 0$$

$$(s^2 - s - 2)\,Y(s) = s - 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

گام چهارم: به کمک تبدیل لاپلاس معکوس $y$ را محاسبه می کنیم. در اینجا از تجزیه به کسرهای جزئی بهره می گیریم.

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2 - s - 2}\right\}$$

$$\frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}$$

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2/3}{s+1}\right\} = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=\sin(2x)$ که در شرایط اولیه $y(0)=2$ و $y'(0)=1$ صدق می‌کند را بیابید.

$$\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{\sin(2x)\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

$$(s^2+1)Y(s)=\frac{2}{s^2+4}+2s+1 \Rightarrow Y(s)=\frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\frac{2s^3+s^2+8s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{A_1s+B_1}{s^2+1}+\frac{A_2s+B_2}{s^2+4}$$

$$2s^3+s^2+8s+6=(A_1s+B_1)(s^2+4)+(A_2s+B_2)(s^2+1)$$

$$2s^3+s^2+8s+6=(A_1+A_2)s^3+(B_1+B_2)s^2+(4A_1+A_2)s+(4B_1+B_2)$$

$$A_1+A_2=2 \Rightarrow A_2=2-A_1=2-2=0$$

$$B_1+B_2=1 \Rightarrow B_2=1-B_1=-2/3$$

$$4A_1+A_2=8 \Rightarrow 3A_1+\underbrace{A_1+A_2}_{2}=8 \Rightarrow A_1=\frac{6}{3}=2$$

$$4B_1+B_2=6 \Rightarrow 3B_1+\underbrace{B_1+B_2}_{1}=6 \Rightarrow 3B_1=5 \Rightarrow B_1=5/3$$

$$\Rightarrow y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}+\frac{5/3}{s^2+1}-\frac{2/3}{s^2+4}\right\}$$

$$=2\cos(x)+5/3\sin(x)-1/3\sin(2x)$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y^{(4)}-y=0$ با شرایط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ و $y''(0)=0$ و $y^{(3)}(0)=0$ را بدست آورید.

$$\mathcal{L}\{y^{(4)}\}-\mathcal{L}\{y\}=0 \rightarrow s^4\mathcal{L}\{y\}-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y^{(3)}(0)-\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s^2}{s^4-1}=\frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)}=\frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{s+1}+\frac{A_3 s+A_4}{s^2+1}$$

$$A_1=\lim_{s\to 1}(s-1)Y(s)=\frac{1}{4} \qquad A_2=\lim_{s\to -1}(s+1)Y(s)=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{s\to\infty} sY(s) \rightarrow 0=A_1+A_2+A_3 \Rightarrow A_3=0$$

اکنون فقط باید به محاسبه ضریب مجهول $A_4$ بپردازیم، کافیست $s=0$ قرار دهیم:

$$Y(0)=0=-A_1+A_2+A_4 \Rightarrow A_4=\frac{1}{2}$$

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/4}{s-1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/4}{s+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s^2+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}\sin(x)=\frac{1}{2}\sinh(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$$

## قضایای تبدیل لاپلاس:

قضیه اول انتقال: اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ باشد، در اینصورت

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$$

اثبات:

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)\,dx=\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\}$$

مثال:

$$1)\ \mathcal{L}\{x e^{ax}\}$$

اگر $f(x)=x$ درانصورت $F(s-a)=\mathcal{L}\{x e^{ax}\}$ و از آنجا که

$$\mathcal{L}\{x\}=\frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{x e^{ax}\}=\frac{1}{(s-a)^2}$$

مثال: چون $\mathcal{L}\{\sin(2x)\}=\frac{2}{s^2-4}$ پس

$$\mathcal{L}\{e^{3x}\sin(2x)\}=\frac{2}{(s-3)^2-4}$$

درحالت کلی داریم:

$$1)\ \mathcal{L}\{e^{ax}x^n\}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad , n=0,1,2,\dots$$

$$2)\ \mathcal{L}\{e^{ax}\sin(bx)\}=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$3)\ \mathcal{L}\{e^{ax}\cos(bx)\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$4)\ \mathcal{L}\{e^{ax}\sinh(bx)\}=\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$$

$$5)\ \mathcal{L}\{e^{ax}\cosh(bx)\}=\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$$

قضیه: به عنوان نتیجه‌ای از قضیه قبل اگر $f(x)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ درانصورت

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{ax}f(x)$$

بطور معادل داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{ax}\mathcal{L}^{-1}\{F(s+a)\}$$

مثال:

1) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+1}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2-3}\right\}=e^{-2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2-3}\right\}=e^{-2x}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\}\right)$$

$$=e^{-2x}\cosh(\sqrt{3}x)-\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh(\sqrt{3}x)$$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{9s-1}}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{9(s-\frac{1}{9})}}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{9}}}\right\}=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{9}}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{e^{\frac{x}{9}}}{3}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{e^{\frac{x}{9}}}{3\sqrt{\pi x}}$$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+4s+13}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+2)^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+2)-3}{(s+2)^2+9}\right\}=e^{-2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+9}\right\}$$

$$=2e^{-2x}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{s^2+9}\right\}\right)$$

$$=2e^{-2x}\left(\cos(3x)-\frac{1}{2}\sin(3x)\right)$$

قضیه (تبدیل لاپلاس انتگرال):

اگر $f$ تابعی انتگرال پذیر باشد، در اینصورت

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(x)\}=\frac{F(s)}{s}$$

اثبات: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow h'(x)=f(x)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{h'(x)\} = s\mathcal{L}\{h(x)\} - h(0) = s\mathcal{L}\{h(x)\}$$

$$\Rightarrow F(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

نتیجه:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^x f(t)\,dt$$

مثال:

1) $\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sinh(2t)\,dt\right\}$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sinh(2x)\} = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^2-4}\right)$$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

$$= \int_0^x \sin(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_0^x = 1-\cos(x)$$

3) $\mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{-t}\cos(t)\,dt\right\}$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{e^{-x}\cos(x)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\cos(x)\}_{s\to s+1}$$

$$= \frac{1}{s}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]_{s\to s+1} = \frac{1}{s}\,\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

مشتق تبدیل لاپلاس:

قضیه: فرض کنید $f$ تابعی قطعه‌ای پیوسته روی $[0,\infty)$ و از مرتبه نمایی باشد و $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$، در اینصورت:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}((-1)^n x^n f(x)) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\mathcal{L}(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

اثبات:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty -t e^{-st} f(t)\, dt = \mathcal{L}(-t f(t))$$

با مشتق گیری مکرر از رابطه بالا حکم ثابت می شود.

مثال:

1) $\mathcal{L}\{t \cos(2t)\}$

$$= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cos(2t)) = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2+4} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

2) $\mathcal{L}\{t \sinh(t)\}$

$$= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sinh(t)\} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2-1} = -\frac{-2s}{(s^2-1)^2} = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

3) $\mathcal{L}\{x e^{-2x} \sin(x)\}$

$$= \mathcal{L}\{x \sin(x)\}_{s \to s+2}$$

$$\mathcal{L}\{x \sin(x)\}$$

$$= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin(x)\} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2+1} = -\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

5) $\mathcal{L}\{x \int_0^x e^{-t} \cos(2t)\, dt\}$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\left(\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt\right)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{e^{-x}\cos(2x)\right\}\right)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\cos(2x)\right]_{s\to s+1}\right)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]_{s\to s+1}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{s((s+1)^2+4)}\right)$$

$$= \frac{2s^3+5s^2+4s+5}{s^2(s^2+2s+5)}$$

6) $\mathcal{L}\left\{x^2\sin(x)\right\}$ :

$$= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\left\{\sin(x)\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{8s^2}{(s^2+1)^3} - \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

7) $\mathcal{L}\left\{x^2 e^x \int_0^x \cos(t)\,dt\right]$ تمرين :

نتیجه:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$$

از نتیجه فوق بخصوص جهت محاسبه لاپلاس معکوس توابع معکوس بفرم $\tan^{-1}$، $Ln$ و ... کمک می‌گیریم.

8) $\mathcal{L}^{-1}\left(Ln\left(\frac{s+1}{s+3}\right)\right)$

$$= -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(Ln(s+1) - ln(s+3)\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\right\} = -\frac{1}{x}\left(e^{-x} - e^{-3x}\right)$$

9) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$

$$= -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\} = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}}\right\} = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{x}\left(-\sin(x)\right) = \frac{1}{x}\sin(x)$$

نتیجه:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -x\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

از فرمول بالا وقتی استفاده می‌کنیم که لاپلاس معکوس $F(s)$ را نتوانیم محاسبه کنیم، ولی لاپلاس معکوس انتگرال آنرا بتوانیم محاسبه کنیم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= -x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\int \frac{2s}{(s^2+1)^2}\,ds\right\} = -x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\} = x\sin(x)$$

انتگرال تبدیل لاپلاس: اگر $f$ تابعی قطعه‌ای پیوسته روی بازه $[0,\infty)$ و از مرتبه نمایی
باشد، همچنین $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ بطوریکه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ موجود باشد، در اینصورت

$$\int_s^{\infty} F(t)\,dt=\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$$

مثال:

1) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\}$

$$=\int_s^{\infty}\mathcal{L}\{\sin(x)\}\,dt=\int_s^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\tan^{-1}(t)\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(s)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

2) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh(x)}{x}\right\}$

$$=\int_s^{\infty}\frac{1}{t^2-1}\,dt=\frac{1}{2}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln(t-1)-\ln(t+1)\right)\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)\qquad s>1$$

3) $\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{-x}}{x}\right\}$

$$\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln(t)-\ln(t+1)\Big|_s^{\infty}=\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\Big|_s^{\infty}$$

$$=-\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)=\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)$$

تعمیم فرمول انتگرال لاپلاس:

اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f\}$ و تابع $\frac{f(x)}{x^n}$ دارای تبدیل لاپلاس باشد، در اینصورت

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x^n}\right\}=\int_s^\infty\int_{s_1}^\infty\int_{s_2}^\infty\cdots\int_{s_{n-1}}^\infty F(s_n)\,ds_n\,ds_{n-1}\cdots ds_1$$

مثال:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2(x)}{x^2}\right\}$$

$$=\int_s^\infty\int_{s_1}^\infty \mathcal{L}\{\sin^2(x)\}\,ds_2\,ds_1=\int_s^\infty\int_{s_1}^\infty \mathcal{L}\left\{\tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\right\}ds_2\,ds_1$$

$$=\frac{1}{2}\int_s^\infty\int_{s_1}^\infty \frac{1}{s_2}-\frac{s_2}{s_2^2+4}\,ds_2\,ds_1=\frac{1}{2}\int_s^\infty\left(\ln(s_2)-\frac{1}{2}\ln(s_2^2+4)\right)\Big|_{s_2=s_1}^\infty ds_1$$

$$=\frac{1}{2}\int_s^\infty -\ln\left(\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2+4}}\right)ds_1$$

$$=\frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{1}{2}\ln(s_1^2+4)\,ds_1-\frac{1}{2}\int_s^\infty \ln(s_1)\,ds_1$$

$$=-\frac{1}{4}s\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)$$

$$\star\Rightarrow\int\ln(x^2+4)\,dx=x\ln(x^2+4)-\int\frac{2x^2}{x^2+4}\,dx$$

| | $u$ | $dv$ |
|---|---|---|
| $+$ | $\ln(x^2+4)$ | $dx$ |
| $-$ | $\frac{2x}{x^2+4}$ | $x$ |

$$=x\ln(x^2+4)-\int\frac{2(x^2+4)-8}{x^2+4}\,dx$$

$$=x\ln(x^2+4)-\int\left(2-\frac{8}{x^2+4}\right)dx$$

$$=x\ln(x^2+4)-2x+4\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

| | $u$ | $dv$ |
|---|---|---|
| $+$ | $\ln(x)$ | $dx$ |
| $-$ | $\frac{1}{x}$ | $x$ |

$$\int\ln(x)\,dx=x\ln(x)-x$$

**خاصیت تغییر مقیاس:** اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ درانصورت برای $k>0$

$$\mathcal{L}\{f(kx)\}=\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$$

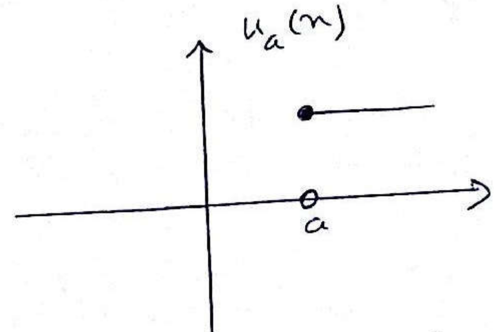
همچنین اگر $k\neq 0$،

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\}=\frac{1}{k}f\left(\frac{x}{k}\right)=\frac{1}{k}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{x\to \frac{x}{k}}$$

**قضیه دوم انتقال:**

**تعریف:** تابع پله‌ای واحد را که به آن تابع هویساید نیز می‌گوییم بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(x-a)=u_a(x)=\begin{cases}1 & x\geq a\\ 0 & o.w\end{cases}$$




**قضیه:** اگر $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ ، درانصورت

$$\mathcal{L}\{u_a(x)\,f(x)\}=e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(x+a)\}$$

$$\mathcal{L}\{u_a(x)\,f(x-a)\}=e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(x)\}$$

**اثبات:**

$$\mathcal{L}\{f(x-a)\,u_a(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}f(x-a)\,u_a(x)\,dx$$

$$=\int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)\,dx=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)\,du \qquad \begin{bmatrix}u=(x-a)\\ du=dx\end{bmatrix}$$

$$=e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du=e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(x)\}$$

مثال:

1) $\mathcal{L}\left\{u_{\frac{\pi}{4}}(x)\sin(x)\right\}$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left\{\sin(x+\frac{\pi}{4})\right\} = e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}\right)$$

2) $\mathcal{L}\left\{H(x-2)e^{x}\right\}$

$$e^{-2s}\mathcal{L}\left\{e^{x+2}\right\} = e^{-2s+2}\mathcal{L}\left\{e^{x}\right\} = \frac{e^{2(1-s)}}{s-1}$$

نکته: تابع قطعه‌ای پیوسته و دو ضابطه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0 \leqslant x < a \\ f_2(x) & x \geqslant a \end{cases}$$

را می‌توان به صورت زیر براساس تابع پله‌ای واحد نوشت:

$$f(x) = f_1(x) - f_1(x)u_a(x) + f_2(x)u_a(x)$$

$$= f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x))u_a(x)$$

در حالت کلی برای تابع قطعه‌ای پیوسته

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 \leqslant x < a_1 \\ f_2(x), & a_1 \leqslant x < a_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_k(x), & a_{k-1} \leqslant x < a_k \\ f_{k+1}(x), & x \geqslant a_k \end{cases}$$