$$f(x)=f_1(x)+(f_2(x)-f_1(x))\,u_{a_1}(x)+(f_3(x)-f_2(x))\,u_{a_2}(x)$$ طریق

$$+\cdots+(f_{k+1}(x)-f_k(x))\,u_{a_k}(x)$$

$$=f_1(x)+\sum_{i=1}^{k}(f_{i+1}-f_i)(x)\,u_{a_i}(x)$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & 0\leq x<\pi\\ \cos(x) & x\geq\pi\end{cases}$ ، تبدیل لاپلاس $f(x)$ را محاسبه نمایید.

$$\mathcal{L}\left\{\sin(x)+(\cos(x)-\sin(x))\,u_\pi(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{s^2+1}+\mathcal{L}\left\{(\cos(x)-\sin(x))\,u_\pi(x)\right\}=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\,\mathcal{L}\left\{\cos(x+\pi)-\sin(x+\pi)\right\}$$

$$=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\,\mathcal{L}\left\{-\cos(x)+\sin(x)\right\}=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left\{\frac{-s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{s^2+1}+\frac{e^{-\pi s}(1-s)}{s^2+1}$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x<3\\ x-1 & 3\leq x<5\\ x^2 & x\geq 5\end{cases}$ را بیابید.

$$f(x)=1+(x-1-1)\,u_3(x)+(x^2-x+1)\,u_5(x)$$

$$=1+(x-2)\,u_3(x)+(x^2-x+1)\,u_5(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(x)\}=\frac{1}{s}+e^{-3s}\,\mathcal{L}\{x+1\}+e^{-5s}\,\mathcal{L}\{(x+5)^2-(x+5)+1\}$$

$$=\frac{1}{s}+e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+e^{-5s}\,\mathcal{L}\{x^2+9x+21\}=\frac{1}{s}+e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+e^{-5s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{9}{s^2}+\frac{21}{s}\right)$$

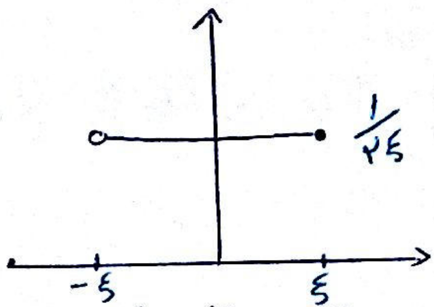
قضیه: اگر $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ در اینصورت

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u_a(x)\, f(x-a)$$

$$= u_a(x)\, \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{x \to x-a}$$

تابع ضربه: تابع ضربه $d_\varepsilon(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$d_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & o.w \end{cases}$$



با توجه به تعریف تابع ضربه:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(0) = +\infty$$

از طرفی $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dt = 1$

خواص بالا ما را به تعریف تابعی تشویق می کند که دلتای دیراک نام دارد. تابع دلتای دیراک $\delta(t)$، تابعی تعریف می شود که $\delta(t) = 0$ و $t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

تذکر: این تابع یک تابع معمولی نیست و درواقع یک تابع تعمیم یافته می باشد درواقع:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} d_\varepsilon(t)$$

به همین ترتیب $\delta(t-t_0)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad t\neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

قضیه:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$$

اثبات:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,d_\varepsilon(t-t_0)\,dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,\frac{1}{2\varepsilon}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\times 2\varepsilon\, f(t^*)=f(t_0) \qquad t_0-\varepsilon<t^*<t_0+\varepsilon$$

قضیه: لاپلاس تابع دلتای دیراک برابر است با

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\,\delta(t-t_0)\}=f(t_0)\,e^{-st_0}$$

توجه شود که تعریف لاپلاس تابع دلتای دیراک به مفهوم عادی نیست بلکه:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\{d_\varepsilon(t)\}$$

قضیه:

اگر $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ آنگاه،

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(x)\left(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\right)_{x\to x-c}$$

$$= u_c(x)f(x-c)$$

مثال: مطلوبست تعیین لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{\sqrt{s-3}}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-3}}e^{-s}\right\} = u_1(x)\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-3}}\right\}\Big|_{x\to x-1}\right)$$

$$= u_1(x)\left(e^{3x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}\Big|_{x\to x-1}\right) = u_1(x)\left(e^{3x}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\right)\Big|_{x\to x-1}$$

$$= u_1(x)\,e^{3(x-1)}\frac{1}{\sqrt{\pi(x-1)}}$$

مثال:

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5) \qquad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$$

حل: اگر $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$، با لاپلاس گیری از طرفین داریم.

$$2\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-5)\}$$

$$2(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-5s}$$

$$(2s^2+s+2)Y(s) = e^{-5s} \Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{2}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right)\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\} = e^{-\frac{t}{4}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\frac{15}{16}}\right\} = \frac{4}{\sqrt{15}} e^{-\frac{t}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}e^{-5s}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right)\right\} = \frac{1}{2}u_5(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\}_{t=t-5}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} e^{\frac{-(t-5)}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right) u_5(t)$$

$$y_t = \begin{cases} 0 & t<5 \\ \frac{2}{\sqrt{15}} e^{\frac{-(t-5)}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right) & t\geq 5 \end{cases}$$

ضرب پیچشی دو تابع (کانولوشن):

ضرب پیچشی تابع $f(x)$ در $g(x)$ بصورت $f*g$ نمادگذاری شده و بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$$

خواص ضرب پیچشی:

1) $f*g = g*f$

2) $f*(g+h) = f*g + f*h$

3) $f*0 = 0*f = 0$

4) $f*(g*h) = (f*g)*h$

لاپلاس کانولوشن:

اگر $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ و $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$

دراینصورت:

$$\mathcal{L}\{f*g\} = F(s).G(s)$$

نتیجه:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f*g$$

مثال: اگر $f(x)=\cos x$ حاصل $f*f$ رابیابید.

حل) $(f*f)(x) = \int_0^x \cos t \cos(x-t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x (\cos x + \cos(x-2t))\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(t\cos x - \frac{1}{2}\sin(x-2t)\right)\Big|_0^x = \frac{1}{2}(x\cos x + \sin x)$

مثال: لاپلاس تابع زیر را محاسبه نمایید

$$f(x) = \sin x + e^{2x} \int_0^x e^{x-t} \cos t \, dt$$

حل) $\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\left\{\sin x + e^{2x} \int_0^x e^{x-t} \cos t \, dt\right\}$

$$= \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x-t} \cos t \, dt\right\}_{s=s-2}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{(s-2)-1} \times \frac{(s-2)}{(s-2)^2+1}$$

$$* \; \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x-t} \cos(t) \, dt\right\} = \mathcal{L}\{e^x\}\mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{1}{s-1} \times \frac{s}{s^2+1}$$

مثال: به کمک قضیه کانولوشن جواب را بدست آورید

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$ $\qquad$ $g(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2x$

$$h(x) = f * g = \int_0^x (x-t) \sin(2t) \, dt$$

$$h(x) = \frac{2x - \sin(2x)}{4}$$

توجه شود که مسئله فوق به کمک تجزیه کسرهای جزئی نیز قابل حل می باشد

$$\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{Bs+c}{s^2+4} = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$$

مثال:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{((s+2)^2+9)^2}\right\}$$

$$e^{-2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\right\} = \frac{e^{-2x}}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\times\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= \frac{e^{-2x}}{9}\left(\sin(3x) * \sin(3x)\right) = \frac{e^{-2x}}{9}\left(\int_0^x \sin(3(x-t))\sin(3t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{54}e^{-2x}\left(\sin 3x - 3x\cos 3x\right)$$

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را بدست آورید.

1) $y'' + 4y = g(t)$ $\qquad y(0)=3\ ,\quad y'(0)=-1$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

$$(s^2+4)Y(s) = G(s) + 3s - 1$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s^2+4} + \frac{3s-1}{s^2+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}\sin(2(t-x))\,g(t)\,dt + 3\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$$

2) $y'' + 3y' + 2y = \cos(\alpha t) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

$$\left(s^2 \mathcal{L}\{y\} - s y(0) - y'(0)\right) + 3\left(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right) + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$s^2 Y(s) - s + 3s\, Y(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)\, Y(s) = s + 3 + \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} + \frac{s}{(s^2+a^2)(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2+\alpha^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s+1)(s+2)}\right\} = (e^{-t} - e^{-2t}) * \cos(\alpha t)$$

از کاربردهای تبدیل لاپلاس حل دستگاه معادلات دیفرانسیل است. جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ابتدا از همه ی معادلات لاپلاس گرفته و سپس دستگاه ظاهر شده را به کمک روش کرامر حل نموده و لاپلاس توابع مجهول را بدست می آوریم و در انتها کافیست از لاپلاس معکوس استفاده کرده و جواب دستگاه را بدست آوریم

مثال:

$$\begin{cases} y_1' - 6y_1 + 3y_2 = 8e^x \\ -2y_1 + y_2' - y_2 = 4e^x \end{cases} \qquad y_1(0) = -1 \qquad y_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} s\mathcal{L}\{y_1\} - y_1(0) - 6\mathcal{L}\{y_1\} + 3\mathcal{L}\{y_2\} = \frac{8}{s-1} \\ -2\mathcal{L}\{y_1\} + s\mathcal{L}\{y_2\} - y_2(0) - \mathcal{L}\{y_2\} = \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-4)Y_1(s) + 3Y_2(s) = \frac{9-s}{s-1} \\ -2Y_1(s) + (s-1)Y_2(s) = \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$Y_1(s) = \frac{-s+7}{(s-1)(s-4)} \qquad Y_2(s) = \frac{2}{(s-9)(s-4)}$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s-4}\right\} = -2e^t + e^{4t}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2/3}{s-1} + \frac{2/3}{s-4}\right\}$$

$$= -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$$

مثال: $xy'' + (2x+3)y' + (x+3)y = 3e^{-x}$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=0$

$$\mathcal{L}\{xy''\} + 2\mathcal{L}\{xy'\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{xy\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \frac{3}{s+1}$$

من دراستنا $\mathcal{L}\{x f(x)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(x)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\} - 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y'\} - \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y\} + 3\mathcal{L}\{y\}$$

$$= \frac{3}{s+1}$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 Y(s)) - 2\frac{d}{ds}(sY(s)) + 3(sY(s)) - \frac{d}{ds}(Y(s)) + 3Y(s)$$

$$= \frac{3}{s+1}$$

$$-s^2Y'(s) - 2Y(s) - 2(sY'(s) + Y(s)) + 3sY(s) - Y'(s) + 3Y(s) = \frac{3}{s+1}$$

$$(-s^2 - 2s - 1)Y'(s) + (-2s - 2 + 3s + 3)Y(s) = \frac{3}{s+1}$$

$$Y'(s) - \frac{-1}{s+1}Y(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = e^{-x} \times \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = xe^{-x}$$

حل معادلات انتگرال به کمک لاپلاس :

$$f(x) = 4x - 3\int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\, dt \qquad f(0)=0$$

$$L\{f(x)\} = \frac{4}{s^2} - 3L\{\sin t * f(t)\}$$

$$F(s) = \frac{4}{s^2} - 3 \times \frac{1}{s^2+1} \times F(s)$$

$$\left(1+\frac{3}{s^2+1}\right)F(s) = \frac{4}{s^2} \rightarrow \left(\frac{s^2+4}{s^2+1}\right)F(s) = \frac{4}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{\frac{4}{s^2}}{\frac{s^2+4}{s^2+1}} = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{4(s^2+4)-12}{s^2(s^2+4)}$$

$$= \frac{4}{s^2} - \frac{12}{s^2(s^2+4)} = \frac{4}{s^2} + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$A=0$$
$$B=1$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}$$

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+4}\right\} = x + \frac{3}{2}\sin(2x)$$

توضیح: معادله انتگرال، معادله‌ای است تابعی که در آن تابع مجهول زیر انتگرال ظاهر شده باشد.

مثال:

$$y'(x) = e^{x} - \int_0^{x} y(t)\,dt \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^{x}\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^{x} y(t)\,dt\right\}$$

$$s\,\mathcal{L}\{y\} - y(0) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$sY(s) - 1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}Y(s)$$

$$\left(\frac{s^2+1}{s}\right)Y(s) = \frac{s}{s-1} \longrightarrow Y(s) = \frac{\frac{s}{s-1}}{\frac{s^2+1}{s}} = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)}$$

تجزیه کسر:
$$\frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A = \frac{1}{2} \qquad 1 = A + B \Rightarrow B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s+1}{s^2+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} + \cos x + \sin x\right)$$

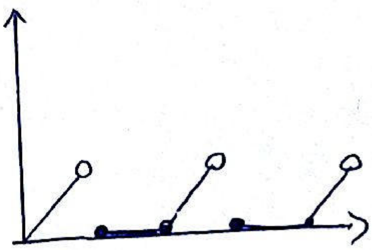
لاپلاس تابع متناوب:

برای تابع قطعه‌پیوسته $f(x)$، با دوره تناوب T داریم:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T} e^{-sx} f(x)\,dx$$

مثال: اگر $f(x)$ بصورت زیر باشد، تبدیل لاپلاس آن‌را محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x) \qquad (T=2)$$



$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\int_0^1 x e^{-sx} dx \right) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\left(\frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}\right) e^{-sx} \right) \Big|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) e^{-s} + \frac{1}{s^2} \right)$$