برخی خواص سیگما:

1) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ 2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ 3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$ if $r \neq 1$

انتگرال معین:

فرض کنید P مجموعه نقاط مرتبی بین a و b مانند

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

باشد که $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. در اینصورت مجموعه $\underline{\underline{P}}$ را یک افراز بازه $[a, b]$ گوییم. یک افراز در واقع بازه $[a, b]$ را به n زیربازه تقسیم می کند که در آن زیربازه i ام بصورت $[x_{i-1}, x_i]$ است. این زیربازه های زیربازه های افراز نامیده می شوند عدد n به افراز بستگی دارد و می نویسیم $n = n(P)$. طول زیربازه i ام را با Δx_i نمایش داده و داریم $(i = 1, \dots, n)$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. بزرگترین مقدار Δx_i، نرم افراز $\underline{P}$ تعریف می شود

$$\|P\| = \max \Delta x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

فرض کنید f تابع پیوسته ای روی بازه $[a, b]$ باشد، در اینصورت با توجه به قضیه اکسترمم مطلق روی هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ دارای یک ماکسیمم مطلق در u_i و مینیمم مطلق l_i دارد.

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad f(l_i) \leqslant f(x) \leqslant f(u_i) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

تعریف: (مجموع بالا و پایین ریمان): مجموع پایین ریمان $L(f, P)$ و مجموع بالای ریمان $U(f, P)$ که در آن f یک تابع و P یک افراز است به صورت زیر تعریف می گردد:

$$L(f,P) = f(L_1)\Delta x_1 + f(L_2)\Delta x_2 + \dots + f(L_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(L_i)\Delta x_i$$

$$U(f,P) = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

اگر P_1 و P_2 دو افراز دلخواه از $[a,b]$ باشند، در این صورت P_2 را یک تظریف از P_1 گوییم هرگاه $P_1 \subseteq P_2$ باشد، واضح است که اگر P_2 تظریفی از P_1 باشد

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P_2) \leqslant U(f,P_2) \leqslant U(f,P_1)$$

با توجه به اینکه همه مجموع ریمان های پایین دارای کران بالایی چون $U(f,P)$ و همه ریمان های بالایی دارای کران پایین چون $L(f,P)$ هستند، بنابراین حداقل یک عدد چون I یافت می شود که برای هر افراز مانند P از بازه $[a,b]$

$$L(f,P) \leqslant I \leqslant U(f,P)$$

اگر فقط یک I موجود باشد که در این خاصیت صدق کند، I را انتگرال معین تابع f گوییم.

تعریف (انتگرال معین):

فرض کنید دقیقاً یک عدد مانند I موجود باشد که برای هر افراز از $[a,b]$،

$$L(f,P) \leqslant I \leqslant U(f,P)$$

در اینصورت تابع f را انتگرال پذیر روی $[a,b]$ و I را انتگرال معین تابع f می نامیم.

انتگرال معین به صورت زیر نمادگذاری می شود:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

۱) $\int$ علامت انتگرال، نماد حرف S در سیگما است

۲) a و b را حدود انتگرال می نامند و a حد پایین و b حد بالایی انتگرال نامیده می شود

۳) تابع f را انتگرالده و x را متغیر انتگرال گیری می گویند.

مجموع ریمان در حالت کلی:

فرض کنید $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ افرازی از $[a,b]$ با $\|P\|$ مشابه قبل باشد. در هر زیر بازه مانند $[x_{i-1}, x_i]$ نقطه‌ای به دلخواه مانند c_i اختیار کنیم و c را بصورت $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ نمادگذاری می نماییم، در اینصورت مجموع زیر

$$R(f, P, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

مجموع ریمان تابع f روی بازه $[a,b]$ نامیده می شود. واضح است که

$$L(f,P) \leqslant R(f,P,c) \leqslant U(f,P)$$

لذا اگر f انتگرال پذیر باشد:

$$\lim_{\substack{n(P)\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f,P,c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

در مورد توابع غیرپیوسته تعریف زیر را برای مجموع ریمان بالا و پایین داریم.

تعریف:

فرض کنید f تابعی کراندار روی $[a,b]$ و P یک افراز از $[a,b]$ باشد در اینصورت برای هر زیر بازه مانند $[x_{i-1}, x_i]$ اعدادی چون M_i و m_i موجودند که M_i کوچکترین کران بالا و m_i بزرگترین کران پایین f روی $[x_{i-1}, x_i]$ هستند در اینصورت:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n(P)} M_i \Delta x_i$$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n(P)} m_i \Delta x_i$$

تعریف انتگرال ریمان:

اگر f روی $[a,b]$ کراندار باشد I_* کوچکترین کران بالای $L(f,P)$ و I^* بزرگترین کران پایین مجموعه تمام $U(f,P)$ ها، در اینصورت تابع f را انتگرال پذیر ریمان روی $[a,b]$ گوییم هرگاه $I^* = I_*$ و

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$$

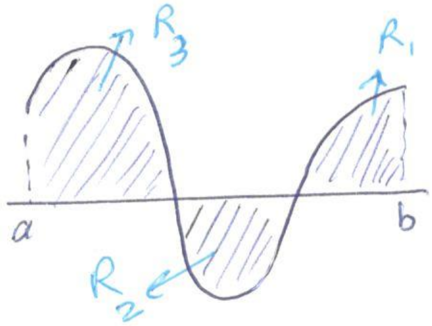
قضیه: هرگاه f تابعی پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشد، در اینصورت f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است.

انتگرال تابع $f(x)$:

1) اگر $f(x) \geq 0$، مساحت محدود به تابع f، محور xها و خط $x=a$ و $x=b$ است

2) اگر $f(x) \leq 0$ منفی مساحت محدود به تابع f، محور xها و خط $x=a$ و $x=b$ است.

3) و در حالت کلی تفاضل مساحت قسمت بالای محور xها و پایین محور x های باشد.



$$\int_a^b f(x)\,dx = R_1 + R_3 - R_2$$

مثال: حد مجموع ریمان بالا و پایین $f(x)=x^2$ را روی بازه $[0,1]$ را به ازای افرازهای مساوی الفاصله یافته و مقدار انتگرال معین آن را روی بازه $[0,1]$ بیابید.

توضیح: اگر $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ یک افراز مساوی الفاصله از بازه $[a,b]$ باشد. در اینصورت چون فاصله نقاط با هم برابر است لذا:

$$\Delta x=\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$$

همچنین نقاط x_i به کمک رابطه زیر تعیین می‌گردند

$$x_i=a+i\Delta x \qquad i=0,1,2,\dots,n$$

با توجه به توضیح فوق،

$$P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right\},\quad x_i=0+\frac{i}{n}=\frac{i}{n},\quad \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

چون $f(x)=x^2$ روی بازه $[0,1]$ صعودی است پس در ابتدای هر زیربازه مقدار مینیمم و در انتهای هر زیربازه مقدار ماکسیمم خود را در آن زیربازه می‌گیرد. پس روی بازه $[x_{i-1},x_i]$ داریم: $l_i=x_{i-1}$, $u_i=x_i$

لذا

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1})^2\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$\lim_{n\to\infty}L(f,P)=\frac{1}{3}$, $\lim_{n\to\infty}U(f,P)=\frac{1}{3}$ / با توجه به اینکه $L(f,P)\leq I\leq U(f,P)$ لذا f روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است و $I=\frac{1}{3}$

محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین:

مثال: حد مجموع زیر را به صورت یک انتگرال معین بیان نمایید.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

توضیح: در این دسته از مسائل باید سعی شود، حد مجموع را بصورت حد مجموع ریمان یک تابع انتگرال پذیر روی بازه ای خاص نوشت. در واقع یافتن تابع و بازه انتگرال مهمترین قسمت های این کار می باشند. یادآوری می شود مجموع ریمان تابع f بصورت زیر است:

$$R(f,P,C)=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

معمولاً باید افراز متساوی الفاصله در نظر گرفته شود.

حل: با توجه به حد مجموع ریمان در رابطه بالا به نظر می رسد تابع زیر انتگرال باید $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ باشد، از طرفی وجود فاکتور $\frac{2}{n}$ (مقایسه کنید با $\frac{b-a}{n}$) نشان می دهد که احتمالاً طول بازه انتگرالگیری برابر 2 است. با توجه به فرمول انتگرال ریمان باید $c_i=\frac{2i-1}{n}$ لذا:

$$c_1=\frac{1}{n}\ ,\quad c_n=\frac{2n-1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}c_1=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}c_n=2$$

پس بازه انتگرالگیری روی $[0,2]$ می باشد.

از طرفی اگر $x_i=\frac{2i}{n}$، $\Delta x=\frac{2}{n}$ داریم:

$$x_{i-1}=\frac{2i-2}{n}\leqslant\frac{2i-1}{n}=c_i\leqslant\frac{2i}{n}=x_i$$

پس حد مجموع فوق را می توان بصورت زیر نوشت

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\int_0^2(1+x)^{\frac{1}{3}}dx$$

مثال: مجموع بالا و پایین تابع $f=x^2$ روی $[0,1]$ به ازای افرازهای متساوی الفاصله را بیابید.

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1})^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} \qquad \Delta x=\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$U(f,P)=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P)=\frac{2}{3} \qquad \lim_{n\to\infty}U(f,P)=\frac{2}{3}$$

مثال: حدود زیر را بصورت یک انتگرال بیان کنید

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2i-1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta x_i=\frac{2}{n}\ ,\ [0,2] \qquad c_i=\frac{2i-1}{n} \qquad \left[\frac{2i-1}{n},\frac{2i}{n}\right] \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow\int_0^2(1+x)^{\frac{1}{3}}dx$$

خواص انتگرال معین: فرض کنید f و g دو تابع انتگرال پذیر روی بازه‌ای شامل نقاط a و b و c باشند، در اینصورت

1) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b (Af(x)+\beta g(x))\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$

4) اگر $a \le b$ و $f(x) \le g(x)$ برای هر $a \le x \le b$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

5) $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

نامساوی مثلثی

6) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

7) اگر f تابع زوجی باشد:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

8) اگر f تابع فردی باشد:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

قضیه مقدار میانگین: (برای انتگرال ها)

اگر f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد، در اینصورت نقطه‌ای چون c روی $[a,b]$ موجود است که

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

اثبات:

چون f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ است، لذا نقطه‌ای چون x_1 و x_2 موجود است که

$\forall x \in [a,b] \qquad m = f(L) \leq f(x) \leq f(u) = M$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

لذا با توجه به قضیه مقدار میانی، تابع f هر مقداری بین این دو مقدار را در حداقل یک نقطه مانند c می‌گیرد.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

تعریف:

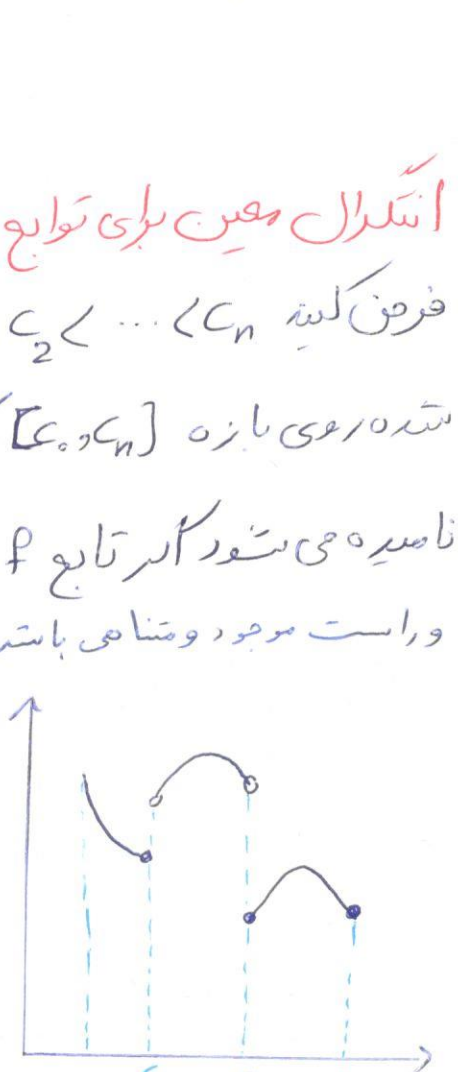
فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر روی $[a,b]$ باشد، در اینصورت مقدار میانگین f روی $[a,b]$ که با $\bar{f}$ نمایش می‌شود بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

انتگرال معین برای توابع قطعه‌ای پیوسته:

فرض کنید $c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ مجموعه نقاطی روی خط حقیقی باشند. تابع f تعریف شده روی بازه $[c_0, c_n]$ مگر احتمالاً در نقاط c_i، یک تابع قطعه‌ای پیوسته روی این بازه نامیده می‌شود اگر تابع f روی هر بازه (c_{i-1}, c_i) پیوسته باشد. و در نقاط c_i حد چپ و راست موجود و متناهی باشند. در این صورت:

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$$



قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه‌ی I شامل نقطه a باشد.

I) فرض کنید $F(x)$ روی بازه I بصورت زیر تعریف شده باشد

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

دراینصورت تابع F روی I مشتق پذیراست و $F'(x) = f(x)$. بنابراین $F(x)$ یک پادمشتق تابع f روی I است لذا

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

II) اگر $G(x)$ یک پادمشتق تابع $f(x)$ روی بازه I باشد، یعنی $G'(x) = f(x)$ برای هر $x \in I$، دراینصورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

نماد گذاری:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: می‌دانیم x^2+3 یک پادمشتق تابع $y = 2x$ است، پس

$$\int_3^5 2x\,dx = x^2 + 3\Big|_3^5 = 28 - 12 = 16$$

اثبات قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

با توجه به قضیه مقدار میانگین برای انتگرال: $(x \le c \le x+h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\, f(c)}{h}$$

با توجه به پیوستگی تابع f

$$= \lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$$

حال فرض کنید $G(x)$ یک پاد مشتق تابع f باشد یعنی

$$G'(x) = f(x)$$

چون $F(x)$ نیز یک پاد مشتق f است پس:

$$F(x) = G(x) + C$$

با قرار دادن $x=a$ داریم:

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C$$

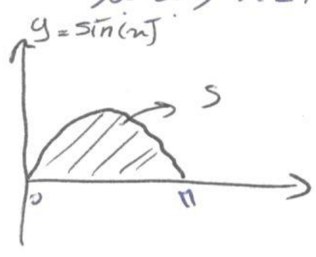
$$\Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = 0 = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a)$$

با قرار دادن $x=b$ داریم:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

مثال: مساحت زیر منحنی $y=\sin(x)$ بالای خط $y=0$ و محدود به خطوط $x=0$ و $x=\pi$ را بیابید.

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2$$



مثال: مطلوبست محاسبه ی

$$\int_{-2}^{2} \frac{5}{1+x^2}\,dx$$

$$= 5\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 5\,tg^{-1}(x)\Big|_{-2}^{2} = 5\,tg^{-1}(2) - 5\,tg^{-1}(-2)$$

مثال: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

1) $F(x) = \int_x^3 e^{-t}\,dt$

$$f(x) = -\int_3^x e^{-t}\,dt \Rightarrow \frac{df}{dx} = -e^{-x}$$

2) $G(x) = x^2 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$

$$G'(x) = 2x\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + x^2 \frac{d}{dx}\underbrace{\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt}_{\star}$$

$$\star \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt = f(u) = \int_{-4}^{u} e^{-t^2}\,dt \qquad u = 5x$$

$$\Rightarrow f'(u) = u'\, f'(u) = 5e^{-u^2} = 5e^{-25x^2}$$

$$\Rightarrow G'(x) = 2x\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + 5x^2 e^{-25x^2}$$

3) $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$

$$= \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt = (3x^2)\,e^{-(x^3)^2} - 2x\left(e^{-(x^2)^2}\right) = 3x^2 e^{-x^6} - 2x e^{-x^4}$$

به طور خلاصه داریم:

$$\left[\ \frac{d}{dx}\int_x^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\,g'(x)\right.$$

$$\left.\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)\ \right]$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin(t)\,dt}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin(x^2)}{2x} = 0$

تغییر متغیر و انتگرال معین :

قضیه : فرض کنید g یک تابع مشتق پذیر روی بازه بسته $[a,b]$ و همچنین f تابعی پیوسته روی برد g باشد، در اینصورت

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad u=g(x)$$

مثال : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$u=\sqrt{x+1} \qquad du=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$$

$$u(0)=1 \qquad u(8)=\sqrt{9}=3$$

$$\Rightarrow I = 2\int_1^3 \cos(u)\,du = 2\sin(u)\Big|_1^3 = 2\sin(3)-2\sin(1)$$

کاربرد انتگرال معین :

محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین :

مثال : مطلوبست محاسبه

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-1}}\right) \qquad P=\{x_0,\dots,x_n\}$$

$$[a,b]=[0,1]$$

$$x_i=\frac{i}{n},\quad c_i=\frac{i}{n} \qquad \Delta x=\frac{1}{n} \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(c_i)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}\right]$

$[a,b]=[0,3] \qquad \Delta x=\frac{3}{n} \qquad c_i=\frac{3(i-1)}{n}$

$P=\{x_0,\cdots,x_n\} \qquad x_i=\frac{3.i}{n}$

$= \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x}\,\Big|_0^3 = 2$

3) $A=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$\ln(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \quad \left(\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n}\right)\right)$

$[a,b]=[0,1]$

$= \int_0^1 \ln(x)\,dx = x\ln(x)-x\,\Big|_0^1 = -1$

$\Rightarrow A = e^{-1}$

محاسبه متوسط تابع f:

مقدار متوسط تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ عدد

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

تعریف می‌شود.

مثال: مقدار متوسط $y=\sqrt[3]{x}$ در فاصله $[0,1]$ کدام است؟

$$m=\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3x^{4/3}}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}$$

مثال: مطلوبست تعیین مقدار متوسط تمام y های مثبت دایره $x^2+y^2=1$

$y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad x=[-1,1]$

$$m=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad x=\sin(t) \Rightarrow t=\sin^{-1}(x)$$
$$dx=\cos(t)\,dt$$

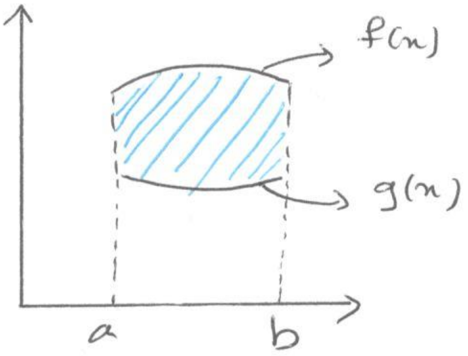
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\cdot dt \; ; \; =\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$$

محاسبه مساحت بین دو منحنی:

اگر f و g دو تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ باشند و $f(x)\geq g(x)$ برای هر $x\in[a,b]$.
درانیصورت ناحیه محدود به منحنی توابع f و g خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر است با

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$



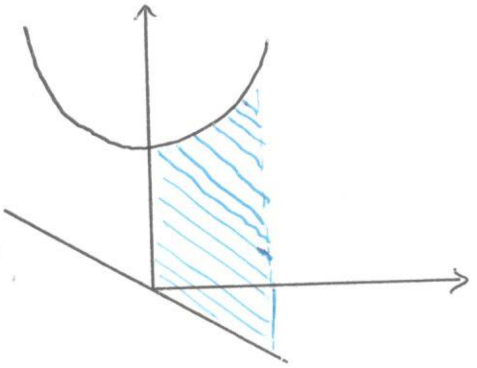
مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی

$x=1$, $x=0$, $y=-x$, $y=x^2+2$

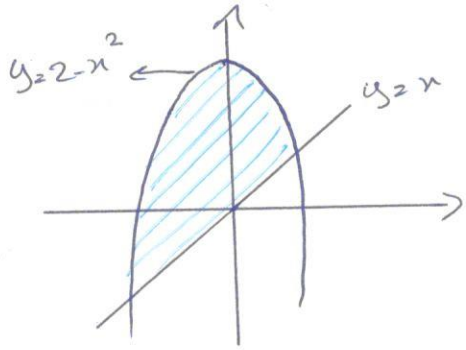
را بیابید.

حل: واضح است که $x^2+2 > -x$ روی $[0, 1]$ نیس

$$A = \int_0^1 [(x^2+2)-(-x)]\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x \Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2 = \frac{17}{6}$$



مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=2-x^2$ و $y=x$ را بیابید.



در اینجا $[a, b]$ داده نشده و باید آن را از تقاطع دو منحنی بدست آوریم:

$$2-x^2 = x$$

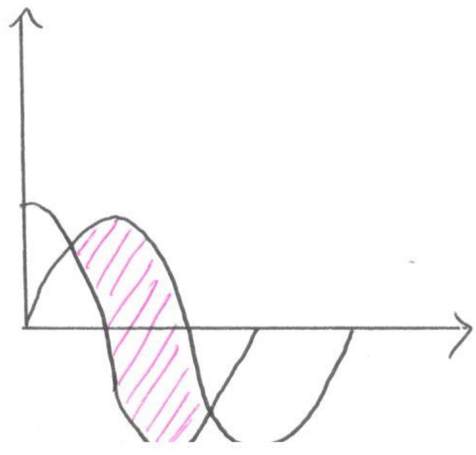
$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

$$x=-2 \quad \text{یا} \quad x=1$$

$$\int_{-2}^{1} \left((2-x^2)-x\right)dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x \Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

مثال: توابع sin و cos بی‌نهایت بار یکدیگر را قطع می‌کنند و نواحی محدود مساوی بوجود می‌آورند. مساحت یکی از این نواحی را بیابید.



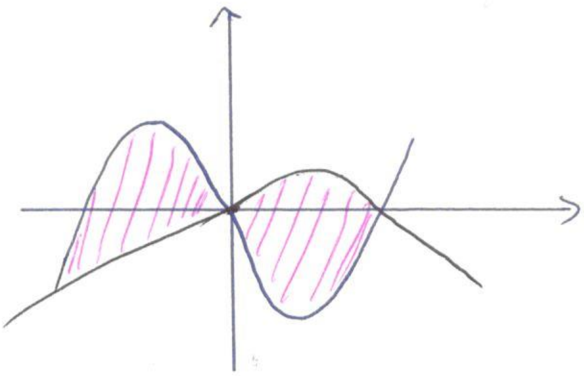
$$\sin(x) = \cos(x) \Rightarrow tg(x)=1$$

$$x=\frac{\pi}{4} \,,\, \frac{5\pi}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(x)-\cos(x))\,dx = (-\cos x - \sin(x))\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

مثال: مساحت بین منحنی‌های $y=-x^2+2x$ و $y=3x^3-x^2-10x$ را بدست آورید



$$3x^3-x^2-10x=-x^2+2x$$

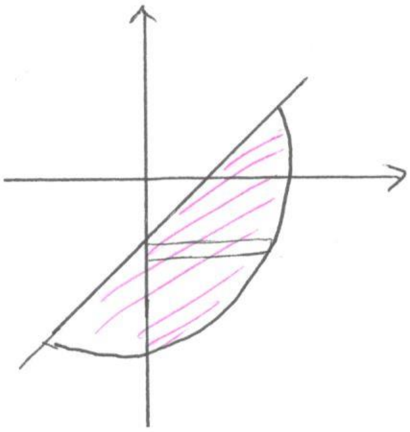
$$3x^3-12x=0 \Rightarrow x=-2, 0, 2$$

$$A=\int_{-2}^{0}[3x^3-12x]\,dx+\int_{0}^{2}(-3x^3+12x)\,dx$$

$$=24$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $x=y+1$ و $x=3-y^2$ را بیابید.

$$3-y^2=y+1 \Rightarrow y^2+y-2=0 \Rightarrow (y+2)(y-1)=0 \Rightarrow y=1 \text{ یا } y=-2$$

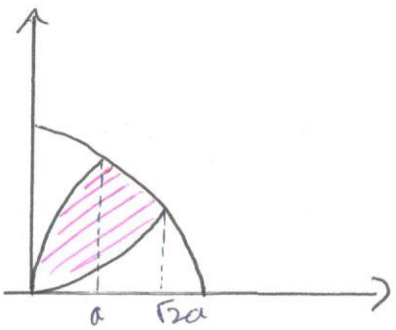


$$\int_{-2}^{1}(3-y^2-y-1)\,dy=-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\Big|_{-2}^{1}$$

$$=\frac{4}{2}$$

مثال: مساحت قسمتی از ربع اول که داخل دایره $x^2+y^2=3a^2$ و محدود به سهمی‌های

$y^2=2ax$ و $x^2=2ay$ و $(a>0)$ است را بیابید.



$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2 \\ y^2=2ax \end{cases} \Rightarrow x^2+2ax-3a^2=0$$

$$x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+12a^2}}{2}$$

$$x=a \quad , \quad x=3a$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2 \\ x^2=2ay \end{cases} \Rightarrow 2ay+y^2-3a^2=0 \qquad y=a \ , \ y=-3a$$

$$y=a \Rightarrow x=\sqrt{2}\,a$$

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a}\right) dx + \int_a^{\sqrt{2}a} \left(\sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2a}\right) dx$$

$$= \sqrt{2a} * \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6a} \Big|_0^a + \dots + \left[\frac{x^3}{6a} + I\right]_0^a$$

$$\int \sqrt{3a^2 - x^2}\, dx \qquad x = \sqrt{3}\, a \sin(t)$$

$$dx = \sqrt{3}\, a \cos(t)$$

$$= \int \sqrt{3}\, a \cos(t) \sqrt{3}\, a \cos(t)\, dt$$

$$= \int 3 a^2 \cos^2(t)\, dt = \int \frac{5}{3} a^2 (1 + \cos(2t))\, dt$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t)\right) + C$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left[\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}a}\right) + \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}a}\right)\right) \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}a}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}a}\right) + \frac{3}{2} a^2 \frac{x}{\sqrt{3}a} * \sqrt{1 - \frac{x^2}{3a^2}}$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{3a^2 - x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^2 - \frac{a^2}{6} + \frac{3a^2}{2}$$