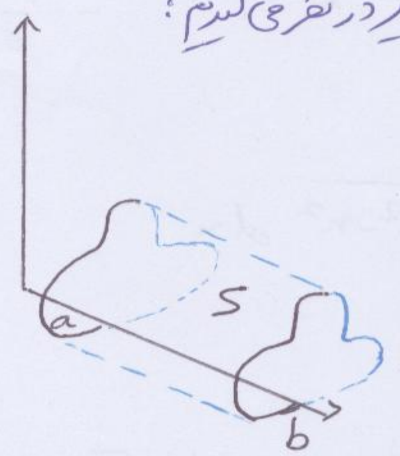
محاسبه حجم:

برای محاسبه حجم جسم S محدود به صفحات $x=a$ و $x=b$، ابتدا افراز P از $[a,b]$ را

بصورت زیر در نظر می گیریم:



$$P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$x_0=a<x_1<\dots<x_n=b$$

حال S را به کمک صفحات $x=x_i$ به قطعه های کوچکی تقسیم می کنیم. حجم هر قطعه که آنرا v_i

می نامیم. تقریباً برابر است با $A(x_i)\Delta x_i$ که در آن $A(x_i)$ مساحت سطح مقطع S با صفحه $x=x_i$

می باشد. لذا

$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i=\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$$

که همان مجموع ریمان تابع $A(x)$ است. پس

$$V=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i=\int_a^b A(x)\,dx$$

تعریف:

حجم یک جسم با سطح مقطع $A(x)$ محدود به صفحات $x=a$ و $x=b$ برابر است با

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

به همین ترتیب حجم یک جسم با سطح مقطع $A(y)$ محدود به صفحات $y=c$، $y=d$ برابر است با

$$V=\int_a^b A(y)\,dy$$

مثال: حجم یک هرم که سطح مقطع آن در فاصله x متری از رأس آن، مربعی به شعاع x است و ارتفاع آن $3m$ است را بیابید.

$$V=\int_0^3 A(x)\,dx=\int_0^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=9\ m^3$$

محاسبه حجم به روش دیسک:

با توجه به بحث مطرح شده حجم جسم حاصل از دوران منحنی $y=R(x)$ حول خط $y=y_0$ برابر است با

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

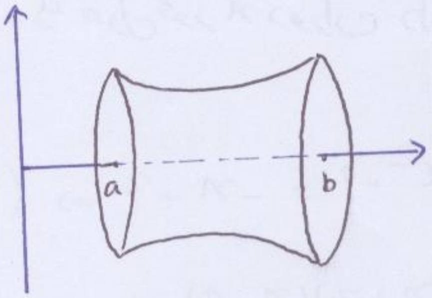
ولی $A(x)$ برابر با مساحت یک دیسک به شعاع $R(x)-y_0$ است، لذا

$$A(x)=\pi\left(R(x)-y_0\right)^2$$

$$V=\pi\int_a^b \left(R(x)-y_0\right)^2 dx$$

به همین ترتیب حجم حاصل از دوران منحنی $x=R(y)$، حول خط $x=x_0$ برابر است با:

$$V=\pi\int_c^d \left(R(y)-x_0\right)^2 dy$$



مثال: حجم جسم حاصل از دوران منحنی $y=\sqrt{\sin(x)}$ حول محور xها را بدست آورید با فرض اینکه $0\le x\le\pi$.

$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx=2\pi$$

مثال: حجم جسم حاصل از دوران منحنی $y=2-x^2$ که محدود به منحنی $y=1$ است را حول خط $y=1$ بیابید.

$$1=2-x^2 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2-1)^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{16\pi}{15}$$

محاسبه حجم به روش واشر:

حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y=R(x)$ و $y=r(x)$ و همچنین خطوط $x=a$ و $x=b$، حول خط $(y=0)$ محور xها با توجه به اینکه سطح مقطع این حجم در هر نقطه فقط یک واشر به شعاع بیرونی $R(x)$ و درونی $r(x)$ است برابر است با:

$$V=\int_a^b \pi\left(R^2(x)-r^2(x)\right)dx$$

مثال: ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^2+1$ و $y=-x+3$ حول محور x دوران داده شده است، حجم جسم حاصل را بیابید.

$$x^2+1=-x+3 \Rightarrow (x^2+x-2)=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1$$

$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left((-x+3)^2-(x^2+1)^2\right)dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{1}(8-6x-x^2-x^4)\,dx=\pi\left(8x-3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=\frac{117\pi}{5}$$

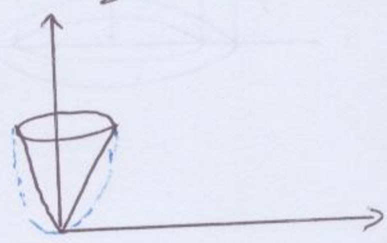
مثال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y=x^2$ و $y=2x$ در ربع چهارم اول را حول محور y ها محاسبه کنید.

$x=\frac{y}{2}$ و $x=\sqrt{y}$

$\sqrt{y}=\frac{y}{2} \Rightarrow y=0, y=4$

$$V=\pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$=\frac{8\pi}{3}$$



محاسبه حجم به کمک پوسته استوانه‌ای:

می خواهیم به محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=f(x)$ و خط $y=0$ و خطوط $x=a$ و $x=b$، حول محور y ها وقتی $a\leq b$ که بپردازیم.

فرض کنید P یک افراز از $[a,b]$ باشد که $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ باشد، به شکل صفحه بعد توجه کنید با دوران قطعه محدود به $x_{i-1}<x<x_i$ و $y=f(x)$ ، $y=0$ حول محور y ها یک پوسته استوانه‌ای تشکیل می شود که حجم آن تقریباً برابر است با

$$V_i=\pi\ f(x_i)\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)$$

$$=\pi\ f(x_i)\left(x_{i-1}^2+2x_i\Delta x_i+\Delta x_i^2-x_{i-1}^2\right)$$

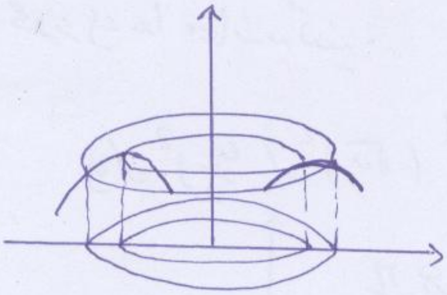
$$=\pi\ f(x_i)\left(2x_i\Delta x_i+\Delta x_i^2\right)$$

$$\Rightarrow V=\sum_{k=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i+o(\Delta x_i^2)$$

$$V=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} 2\pi x f(x_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

اگر حول یک خط قائم دوران کند:



$$V = 2\pi \int_a^b (\text{شعاع استوانه})(\text{ارتفاع استوانه})\, dx$$

یا

$$V = 2\pi \int_a^b \rho(x)\, h(x)\, dx$$

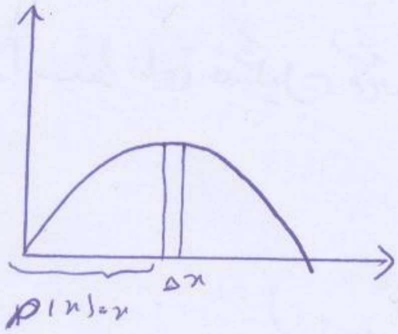
اگر حول یک خط افقی دوران کند:

$$V = 2\pi \int_c^d (\text{شعاع استوانه})(\text{ارتفاع استوانه})\, dy$$

یا

$$V = 2\pi \int_c^d \rho(y)\, h(y)\, dy$$

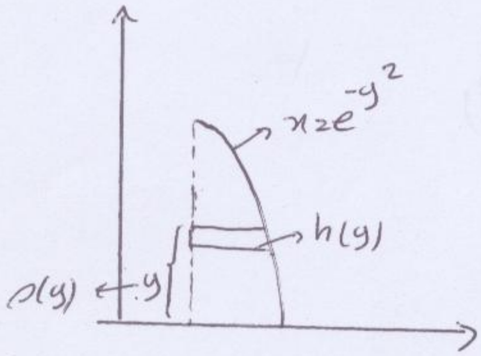
مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y = x - x^3$ و $0 \le x \le 1$ و منحنی x ها را حول محور y ها بدست آورید.



$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\, dx = 2\pi\left(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{15}\pi$$

مثال: حجم حاصل از دوران منحنی $x = e^{-y^2}$ حول محور x ها وقتی $0 \le y \le 1$ است را بدست آورید.

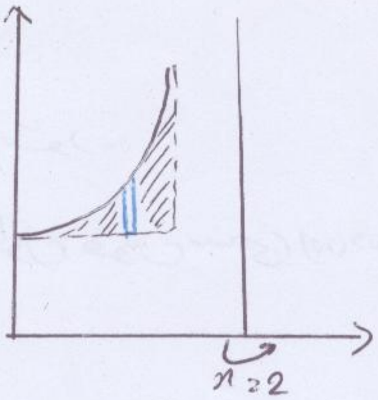


$$V = 2\pi \int_0^1 y\, e^{-y^2}\, dy$$

$$= -\pi\left[e^{-y^2}\right]\Big|_0^1 = \pi(1 - e^{-1})$$

$$= 1.48$$

مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های $y=x^3+x+1$ ، $y=1$ ، $x=1$ حول $x=2$ را بدست آورید.



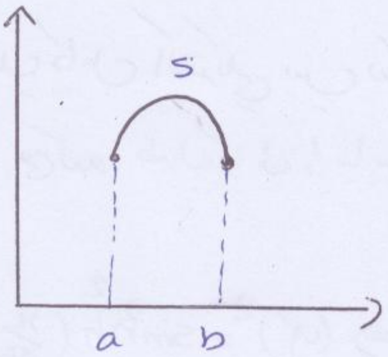
$$h(x)=x^3+x+1-1$$

$$V=2\pi\int_0^1 (2-x)(x^3+x+1-1)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 (-x^4+2x^3-x^2+2x)\,dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{29}{15}\pi$$



طول قوس:

فرض کنید P یک افراز از بازه $[a,b]$ باشد که

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

$$S\simeq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

$$S=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

تعریف: فرض کنید تابع $y=f(x)$ تابعی هموار باشد. یعنی f' موجود و پیوسته روی $[a,b]$ باشد، در اینصورت طول قوس تابع f در بازه $[a,b]$ بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

به طور مشابه اگر $x=g(y)$ یک منحنی هموار باشد، طول قوس y بین c و d بصورت

$$S = \int_c^d \sqrt{1+g'(y)^2}\, dy$$

تعریف می‌شود.

مثال: طول قوس منحنی $y = Ln(\cos(x))$ وقتی $x=0$ تا $x=\frac{\pi}{4}$ است را بیابید.

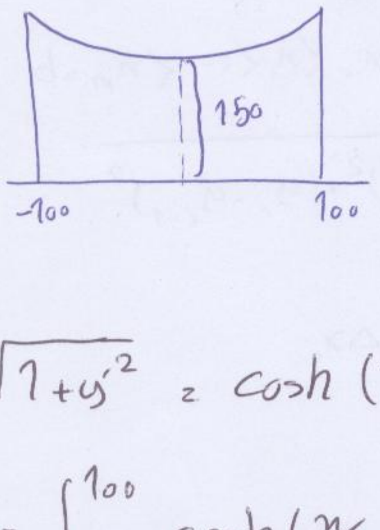
$$\frac{dy}{dx} = -tg(x)$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+tg^2(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)\, dx$$

$$= Ln\left|\sec(x)+tg(x)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = Ln(\sqrt{2}+1) - Ln(1)$$

مثال: یک کابل الکتریکی بین دو دکل به فاصله 200 پا آویزان هستند، شکل کابل از تابع زیر تبعیت می‌کند. طول کابل را بیابید.

$$y = 150 \cosh \frac{x}{150}$$



$$y' = \sinh\left(\frac{x}{150}\right) \Rightarrow (y')^2 = \sinh^2\left(\frac{x}{150}\right)$$

$$\Rightarrow 1+y'^2 = \cosh^2\left(\frac{x}{150}\right)$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \cosh\left(\frac{x}{150}\right)$$

$$S = \int_{-100}^{100} \cosh\left(\frac{x}{150}\right) dx = 150 \sinh\left(\frac{x}{150}\right) = 150\left(\sinh\left(\frac{100}{150}\right) - \sinh\left(-\frac{100}{150}\right)\right)$$

$$= 150\left(2\sinh\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 150\left(e^{2/3} - e^{-2/3}\right) = 215 \text{ ft}$$

طول قوس تابع پارامتری:

اگر C یک منحنی پارامتری به صورت $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ باشد، در اینصورت طول قوس منحنی C وقتی t از a تا b و بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

بخصوص اگر C یک منحنی باشد که با معادله $r = f(\theta)$ و $\alpha < \theta < \beta$

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

مثال: طول قوس منحنی زیر را

$$x = a(\cos t + t\sin t)$$

$$y = a(\sin t - t\cos t)$$

از $t=0$ تا $t=2\pi$ حساب کنید.

حل: از معادلات نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$x'_t = at\cos t \qquad y'_t = at\sin t$$

از آنجائیکه $\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = at$. پس

$$L = \int_0^{2\pi} at\,dt = \frac{at^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2a\pi^2$$