

انتهال های غیرعاری :

تعریف (انتهال غیرعاری نوع اول) :

(1) اگر f تابعی پیوسته روی $[a, \infty)$ باشد، در این صورت :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

(2) اگر f تابعی پیوسته روی $(-\infty, b]$ باشد، در این صورت

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(3) اگر f تابعی پیوسته روی $(-\infty, \infty)$ باشد، در این صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

که در اینجا c یک مقدار دلخواه حقیقی است.

در دو حالت اول انتهال های غیرعاری همگرا هستند هرگاه حدود موجود باشند و در غیر

این صورت واگرا می باشند. در حالت سوم انتهال واگراست اگر یکی از انتهال های

است واگرا باشد.

مثال :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b) - 0) = \infty$$

واگراست.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-n} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-n} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

نتیجہ

$$\int_0^\infty \frac{1}{n^2+1} dn$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{n^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1}(n) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1}(b) - 0) = \frac{\pi}{2}$$

نتیجہ

کافی اہم خصوصیات استعمال کی گئیں :

$$\int_1^\infty (1-n) e^{-n} dn$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty (1-n) e^{-n} dn &= \lim_{b \rightarrow \infty} [n e^{-n}]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{e^b} \right) - \frac{1}{e} \\ &= 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^n}{1+e^{2n}} dn$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^n}{1+e^{2n}} dn + \int_0^\infty \frac{e^n}{1+e^{2n}} dn = \lim_{a \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(e^n) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1}(e^n) \Big|_0^b$$

$$\tan^{-1}(e^n) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(e^a) \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1}(e^b) - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

تعریف (انتگرال غیرعاری نوع دوم):

(1) اگر f تابعی پیوسته روی بازه (a, b) بود و در b یک کران شود، در این صورت

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

(2) اگر f تابعی پیوسته روی (a, b) باشد و در a یک کران شود، در این صورت

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

(3) اگر f در $[a, b]$ تغییر از $C \in (a, b)$ پیوسته باشد و در C یک کران شود داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^C f(x) dx + \int_C^b f(x) dx$$

در دو حالت اول، انتگرال کمرات اگر حد موجود باشد و در غیر این صورت واگر است.

حالت سوم انتگرال کمرات اگر هر دو انتگرال متراست موجود باشند

مثال ۱:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_b^1 = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (1 - b^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{2} \quad \text{کمرات}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_b^2 = \lim_{b \rightarrow 0^+} 2 \ln(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2b^2}) = \infty \quad \text{واگر است}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}$$

فائزات سے کل وائزات

$$\left[\begin{array}{l} \text{استانہ مساویں} \\ \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \left. \frac{-1}{2x^2} \right|_{-1}^2 = \frac{3}{8} \end{array} \right] \text{غلط}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= 2 \lim_{C \rightarrow 1^-} \ln \int_0^C \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \lim_{C \rightarrow 1^-} \ln \sin^{-1}(u) \Big|_0^C = 2 \lim_{C \rightarrow 1^-} \ln \sin^{-1}(C) = \pi$$

$$\int_0^1 \ln(x) dx$$

$$\lim_{C \rightarrow 0^+} \ln \int_C^1 \ln(x) dx = \lim_{C \rightarrow 0^+} \ln (x \ln(x) - x) \Big|_C^1 = \lim_{C \rightarrow 0^+} \ln (0 - 1 - C \ln(C) + C)$$

$$= -1 + \lim_{C \rightarrow 0^+} \ln \frac{\ln(C)}{\frac{1}{C}} = -1 + \lim_{C \rightarrow 0^+} \ln \frac{\frac{1}{C}}{-\frac{1}{C^2}} = -1$$

غلط

قضیہ: (p-استدلال ها) اگر $a < \infty$ آنگاه

$$\int_a^\infty x^{-p} dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1} & \text{اگر } p > 1 \\ \text{وائز} & \text{اگر } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^a x^{-p} dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{1-p} & p < 1 \\ \text{وآنها} & p \geq 1 \end{cases}$$

قضیه (آزمون مقایسه): فرض کنید $a < b < \infty$ ، و f و g توابعی پیوسته روی

(a, b) باشند و همچنین $0 < f(x) < g(x)$ ، در این صورت اگر $\int_a^b g(x) dx$ همگرا باشد

$\int_a^b f(x) dx$ نیز همگراست و

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

برعکس اگر $\int_a^b f(x) dx$ واگرا باشد، $\int_a^b g(x) dx$ واگراست.

قضیه: اگر f و g در بازه $[a, \infty)$ مثبت و پیوسته باشند و $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

در این صورت اگر $A \neq 0$ و $A \neq \infty$ ، $\int_a^\infty f(x) dx$ و $\int_a^\infty g(x) dx$ یا هر دو موجودند و یا هر دو واگرا هستند.

اگر $A = 0$ و $\int_a^\infty g(x) dx$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f(x) dx$ همگراست.

اگر $A = \infty$ و $\int_a^\infty g(x) dx$ واگرا باشد، $\int_a^\infty f(x) dx$ واگراست.

مثال: همگرایی و واگرایی انتگرال‌های زیر را استنتاج کنید.

$$1) \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$[0, 1) \quad 0 < e^{-x^2} < 1 \Rightarrow 0 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 1 dx = 1$$

$$[1, \infty) \quad 0 < e^{-x^2} < e^{-x} \Rightarrow 0 < \int_1^\infty e^{-x^2} dx < \int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{e}$$

لذا انتگرال همگراست و کمتر از $1 + \frac{1}{e}$ است. (134)

$$2) \int_0^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{n+n^3}}$$

$$\int_0^1 \frac{dn}{\sqrt{n+n^3}} + \int_1^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{n+n^3}}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{dn}{\sqrt{n+n^3}} < \int_0^1 \frac{dn}{n^{\frac{1}{2}}} = 2 \rightarrow \text{محدّات}$$

$$\cdot < \int_1^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{n+n^3}} < \int_1^{\infty} \frac{dn}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{محدّات}$$

قضیه: انتگرال‌هایی به فرم زیر

$$\int_a^{\infty} e^{-p(n)} dn, \quad \int_{-\infty}^b e^{p(n)} dx$$

برای هر $p > 0$ همراوه ازای هر $p < 0$ و آنرا هستند.

تعریف (همرای مطلق و مرسوم): انتگرال $\int_a^b f(n) dn$ همرای مطلق گویند هرگاه

$$\int_a^b |f(n)| dn \quad \text{همرا باشد. اگر } \int_a^b f(n) dn \quad \text{موجود و } \int_a^b |f(n)| dn \quad \text{و آنرا باشد،}$$

همرای مرسوم نام دارد.

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dn}{n \ln^3(n)}$$

مثال:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{e^2}^b \frac{dn}{n \ln^3(n)} = \ln - \frac{1}{2 \ln^2(n)} \Big|_{e^2}^b = \ln \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \ln^2(b)} \right) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{8}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2+1) \quad \text{L'Hôpital}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x\sqrt{x}} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{3}{2}}}{1+x\sqrt{x}} = 0 \quad \text{L'Hôpital}$$

$$\int_1^{\infty} 2 \sin^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}} dx$$

$$\int_2^{\infty} x^{-\frac{11}{35}} \frac{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}} dx$$