تعریف دنباله: لیست مرتبی از اعداد مانند $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ را یک دنباله گویند

a_1 را جمله اول دنباله، a_2 را جمله دوم دنباله و a_n را جمله n ام دنباله در نظر می گیرند.

معمولاً جملات دنباله را اعداد حقیقی فرض می کنیم، گرچه بسیاری از تعاریف در مورد اعداد مختلط نیز درست هستند.

n را اندیس جمله a_n گویند. همچنین دنباله را می توان به عنوان تابعی در نظر گرفت که اعداد طبیعی را به اعداد حقیقی می برد. به عنوان مثال دنباله $\{2, 4, 6, \dots\}$ را می توان به صورت $a_n = 2n$ در نظر گرفت. به سه طریق می توان دنباله را مشخص کرد:

1) نوشتن چند جمله از آن و سپس .... در صورتی که الگوی دنباله مشخص باشد.

2) نوشتن یک فرمول برای جمله عمومی دنباله a_n، به صورت تابعی از n.

3) ارائه یک فرمول برای محاسبه a_n به کمک $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ و همچنین ارائه $n-1$ جمله اول دنباله. (دنباله های بازگشتی)

دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ را می توان به صورت $\{a_n\}$ خلاصه کرد:

مثال:

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}, \quad \left\{\frac{n-1}{n}\right\}, \quad \left\{\cos(n-1)\pi\right\}, \quad \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$$

$$\left\{\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right\} \qquad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$ (دنباله فیبوناچی)

دنباله $\{a_n\}$ را از پایین کراندار گوییم. هرگاه ثابت مانند L موجود باشد که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad L \leq a_n$$

در اینصورت L را کران پایین دنباله $\{a_n\}$ گوییم.

دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کراندار با کران بالای M گوییم هرگاه

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad a_n \leq M$$

همچنین دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد، به طور معادل یعنی ثابتی چون k موجود باشد که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad |a_n| \leq k$$

دنباله $\{a_n\}$ را مثبت گوییم هرگاه

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_n$$

و دنباله $\{a_n\}$ را منفی گوییم هرگاه

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq 0$$

دنباله a_n را صعودی (نزولی) گوییم، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$).

دنباله a_n را یکنوا گوییم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

دنباله $\{a_n\}$ را تناوبی گوییم هرگاه $a_n a_{n+1} < 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. یعنی هر دو جمله متوالی دنباله مختلف العلامت باشند.

مثال: نشان دهید دنباله $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ دنباله نزولی است.

$a_n = f(n) \qquad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leqslant 0 \qquad x \geqslant 1$$

لذا a_n نزولی است.

مثال: دنباله $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ به فرم $\left\{\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{9}{8}, \dfrac{25}{32}, \dfrac{36}{64}, \dots\right\}$

دنباله‌ای مثبت، از پایین کراندار و از جایی به بعد نزولی است.

تعریف حد دنباله‌ها:

دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به حد L گوییم، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

مثال: نشان دهید که $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$ برای هر c و $p > 0$.

حل: فرض کنید $\varepsilon > 0$ باشد، در اینصورت

$$\left|\frac{c}{n^p}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|c|}{\varepsilon} < n^p \Rightarrow \left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} < n$$

لذا اگر برای هر $n \geqslant N$، $N = \left[\left(\dfrac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\right] + 1$ پس $|a_n| < \varepsilon$

لذا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

هر دنباله به یک عدد متناهی مانند L همگرا است و یا واگرا است، اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ یا $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

به طور خلاصه می‌گوییم دنباله a_n واگرا می‌شود به بی‌نهایت.

نکته: اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ و $a_n = f(n)$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

قضیه:

اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله های همگرا باشند:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

2) $\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ اگر $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

5) اگر $a_n \leqslant b_n$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$

6) اگر $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

(قضیه ساندویچ یا فشار)

تمرین: حد دنباله های زیر را محاسبه کنید:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - n$

4) $\lim_{n\to\infty} n \, tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

قضیه 1: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه $\{a_n\}$ کراندار است.

قضیه 2: اگر a_n دنباله‌ای از بالا کراندار و از جایی به بعد صعودی باشد و یا اگر a_n دنباله‌ای از پایین کراندار و از جایی به بعد نزولی باشد، دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.

مثال: نشان دهید که دنباله بازگشتی

$$a_1 = 1 , \quad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

همگرا است و حد آنرا بیابید.

حل: اولاً به سادگی به کمک استقرای ببینیم این دنباله صعودی است

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = \sqrt{7}$$

اگر $a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} \geq a_k$

$$a_{k+2} = \sqrt{6+a_{k+1}} \geq \sqrt{6+a_k} = a_{k+1}$$

به همین ترتیب می‌بینیم که 3 یک کران بالا برای این دنباله است

$$a_1 = 1 < 3 \qquad a_2 = \sqrt{7} < 3$$

اگر $3 \geq a_k$، داریم $a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} \leq 3$. لذا $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه قبل همگرا است. امّا با توجه به اینکه این دنباله همگرا است داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 6 + \lim a_n}$$

$$L = \sqrt{6+L} \Rightarrow L^2 = 6 + L$$

$$L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow (L-3)(L+2) = 0$$

$$L = 3 \checkmark \qquad L = -2 \times$$

تمرین: همگرایی دنباله های $a_{n+1}=\sqrt{1+2a_n}$ و $a_1=1$ را بررسی کنید.

تمرین: اگر $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ به کمک رابطه $\ln(a_n)=n\ln(1+\frac{1}{n})$ نشان دهید $\{a_n\}$ صعودی است و سپس نشان دهید از بالا کراندار به e است.

قضیه 2: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی (از جایی به بعد) باشد، در اینصورت یا از بالا کراندار است و همگرا و یا واگرایی نهایتی می شود.

قضیه 3: اگر $|x|<1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x^n=0$

اگر x یک عدد حقیقی باشد، $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$

مثال:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n}=1$$

حدود مهم:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(n)}{n}}=1$$

3) $\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1$

$$\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(x^{\frac{1}{n}})}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(x)}{n}}=1$$

4) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{1/n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-x/n^2}{1+x/n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} = x \quad (6)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^x = e^x$$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

$$\frac{-|x|}{n!} \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

$m > |x|$

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1\times 2\times \cdots \times m \times (m+1) \times \cdots \times n} \leq \frac{|x|^n}{m!\, m^{n-m}} = \frac{|x|^n m^m}{m!\, m^n}$$

$$= \frac{m^m}{m!} \left(\frac{|x|}{m}\right)^n \to 0$$

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{m^m}{m!} \left(\frac{|x|}{m}\right)^n \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{|x|^n}{n!} \to 0$$

سری ها:

تعریف: یک سری نامتناهی که معمولاً "سری نامیده می شود، مجموع بی نهایت عبارت به فرم $a_1+a_2+a_3+\cdots$ است که آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots$$

به a_n جمله عمومی سری گفته و a_1، a_2، ... را جملات سری می گوییم. دنباله مجموع های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\quad s_3=a_1+a_2+a_3,\ldots,\quad s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ldots$$

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا به s گوییم، هرگاه دنباله مجموع های جزئی s_n همگرا به s باشد یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s < \infty$$

در غیر این صورت سری را واگرا گوییم. s را مقدار همگرایی سری گویند.

سری هندسی: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a+ar+ar^2+\cdots$$

که دارای جمله عمومی $a_n = ar^{n-1}$ است را سری هندسی با جمله اول a و قدر نسبت r می نامیم.

$$r=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

هرگاه $|r|<1$ سری هندسی همگرا به $\frac{a}{1-r}$ است.

مثال: عدد همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ را به دست آورید.

$a=\frac{1}{e}$, $r=\frac{1}{e}$ لذا

$$s=\frac{1/e}{1-1/e}=\frac{1}{e-1}$$

مثال: عدد همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$

$$a=1,\ r=-1/5 \Rightarrow \quad s=\frac{1}{1-(-1/5)}=\frac{5}{6}$$

قضیه (شرط لازم همگرایی) : اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

لذا شرط لازم برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ این است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

* توجه کنید که این شرط کافی نیست (سری $\sum 1/n$ همگرا نیست)

نکته : در بررسی رفتار یک سری، اضافه کردن و یا حذف کردن تعداد متناهی جمله تاثیری در همگرایی یا واگرایی آن ندارد.

قضیه : اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله اکیداً مثبت باشد ($a_i > 0$) در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یا همگراست و یا به بی‌نهایت واگرا می‌شود.

قضیه : فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند، در این صورت :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

آزمون انتگرال جهت بررسی همگرایی سری :

اگر f یک تابع مثبت، پیوسته و نزولی برای $x \geq 1$ باشد و $a_n = f(n)$ در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ یا هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرا می‌باشند.

مثال : همگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \qquad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow a_n = f(n)$$

از طرفی $f(x)$ برای $x \geq 1$ پیوسته و مثبت است و

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

لذا $f'(x)$ برای $x \geq 1$، منفی است پس تابع f برای $x \geq 1$ نزولی است و همه شرایط آزمون انتگرال برقرار است. لذا سری بالا با انتگرال زیر هم رفتار است :

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_1^b = \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty} \ln(b^2+1) - \ln(2)\right) = \infty$$

پس سری فوق نیز واگرا است.

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ را بررسی کنید.

حل: اگر $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$، در این صورت $a_n = f(n)$. از طرفی تابع $f(x)$ برای $x \geq 1$، تابعی مثبت، نزولی و پیوسته است پس طبق آزمون انتگرال رفتار سری فوق با انتگرال ناسره زیر مشابه است:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b\to\infty} tg^{-1}(x) \Big|_1^b = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$$

پس سری فوق همگرا است.

P-سری ها و سری هارمونیک:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} = \frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \cdots$$

را یک P-سری گوییم که P عددی ثابت و مثبت است. اگر $P=1$ سری فوق را سری هارمونیک می نامیم. به کمک آزمون انتگرال و محاسبه $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^P} dx$ به سادگی می توان نشان داد که اگر $P>1$، P-سری واگرا و اگر $0<P\leq 1$، P-سری همگرا است.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \qquad f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

f-تابعی مثبت، نزولی و پیوسته برای $x \geq 2$ است:

$$x \geq 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{x^2 \ln^2(x)} < 0$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln(x)) \Big|_2^b = \infty$$

لذا سری فوق واگرا است.

سری تلسکوپی یا ادغامی: سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ را سری تلسکوپی می‌گویند که مجموع جزئی n ام آن برابر است با $s_n = a_{n+1}-a_1$ لذا سری تلسکوپی همگراست اگر و تنها اگر حد رو برو $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود باشد و در این صورت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$$

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)}$ را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \left[\, a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{اگر} \,\right]$$

$$= -\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

سری متناوب:

سری که علامت جملات آن یکی در میان عوض می‌شود یعنی $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ را یک سری متناوب می‌نامیم. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ و دنباله $|a_n|$ نزولی باشد، سری متناوب همگرا است.

درواقع هر سری متناوب با فرض اینکه $b_n > 0$ را می‌توان به یکی از دو فرم زیر نوشت.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \qquad \text{یا} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

دراین صورت شرط همگرایی سری متناوبی به صورت:

۱) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ۲) $b_{n+1} \leq b_n$ (b_n نزولی باشد)

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

چون $\frac{1}{n}$ نزولی است و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ پس این دنباله همگرا است.

تمرین: همگرایی سری متناوبی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$ را بررسی کنید.

آزمون مقایسه:

فرض کنید $b_n \geq a_n \geq 0$، دراینصورت

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا است.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ را درنظر بگیرید، چون $\frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n}$ و

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ همگرا است، لذا طبق آزمون مقایسه این سری نیز همگرا می‌باشد.

آزمون مقایسه حدی:

فرض کنید $a_n>0$ ، $b_n>0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ که در آن l متناهی مثبت است $(l \neq 0)$

در این صورت دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، یا هر دو همگرا می باشند و یا هر دو واگرا.

اگر $l=0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است و اگر $l=\infty$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا است.

مثال:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

لذا طبق آزمون مقایسه سری فوق واگرا است.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{cn+b}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{cn+b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{cn+b}{n} = c$$

لذا این سری با سری هارمونیک طبق آزمون مقایسه حدی، هم رفتار است و بنابراین واگرا است.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2-4n+5}} = 3$$

پس طبق آزمون مقایسه حدی، این سری نیز چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است، همگرا می باشد.

همگرایی مطلق و مشروط:

تعریف: سری $\sum a_n$ را همگرای مطلق گوییم، هرگاه $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

سری $\sum a_n$ را همگرای مشروط گوییم، هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum |a_n|$ واگرا باشد.

نکته: با توجه به آزمون مقایسه، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$، همگرایی $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}$ را در نظر بگیرید.

با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ همگرا است، لذا این سری یک سری همگرای مطلق است.

قضیه آزمون نسبت:

فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد، همچنین فرض کنید $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ در اینصورت:

1) اگر $l<1$، سری همگرای مطلق است.

2) اگر $l>1$، سری واگرا است.

3) اگر $l=1$، آزمون بی‌نتیجه است

آزمون ریشه nام:

سری $\sum a_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ در اینصورت:

1) اگر $l<1$، سری همگرای مطلق است.

2) اگر $l>1$ یا $l=\infty$، سری واگرا است.

3) اگر $l=1$، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی کنید.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1$$

همگرای مطلق است.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

با توجه به آزمون ریشه nام سری همگرا است.

3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

بنابراین با توجه به آزمون نسبت سری همگرای مطلق است

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\, 2^{n+1}}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2} = \frac{2}{3} < 1$$

سری همگرای مطلق است.

5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

با به کارگیری آزمون نسبت داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\, n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

درنتیجه سری واگرا است

سری توانی: سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$

یک سری توانی از $(x-c)$ یا یک سری توانی حول نقطه c نام دارد. مقادیر a_n، ضرایب سری توانی هستند.

قضیه: برای هر سری توانی به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یکی از سه حالت زیر برقرار است:

I) سری فقط در $x=c$ همگرا است

II) عددی مانند R، چنان موجود است که سری برای همه xهایی که $|x-c|<R$ همگرا و به ازای xهایی که $|x-c|>R$ واگرا است. در نقاط انتهایی $(x=c\pm R)$ ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد، در اینصورت R را شعاع همگرایی سری و c را مرکز همگرایی می‌نامیم.

III) سری در کل $\mathbb{R}$، همگرا است. (شعاع همگرایی برابر ∞ است)

تعریف (بازه همگرایی):

مجموع نقاطی که در آن سری توانی همگرا است را بازه همگرایی گویند.

قضیه (تعیین شعاع همگرایی):

اگر $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$، شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ برابر است با $R=\frac{1}{l}$

اگر $l=0$ باشد، $R=\infty$ و اگر $l=\infty$ باشد، $R=0$ است.

قضیه (آزمون ریشه nام برای تعیین شعاع همگرایی):

اگر $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ موجود باشد و $R=\frac{1}{\lambda}$، در اینصورت شعاع همگرایی سری توانی برابر $\frac{1}{\lambda}$ است.

در هر دو بحث فوق در مورد شعاع سری های توانی از همان آزمون نسبت و آزمون ریشه n ام کوشی استفاده شده است . پس همیشه می توانیم بصورت مستقیم از این دو آزمون استفاده کنیم

مثال : فاصله همگرایی سری های زیر را بررسی کنید .

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

$R = \frac{1}{l} = 0$ ، پس شعاع همگرایی برابر 0 است و مرکز همگرایی نقطه 0 می باشد، پس این سری فقط در نقطه 0 همگرا است

2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{3} = 1 \implies R = \frac{1}{l} = 1$$

$|x-2| < 1 \longrightarrow$ سری همگرا است

حال باید نقاط ابتدایی و انتهایی را بررسی کنیم

$x = 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n \implies$ سری واگرا

$x = 3 \implies \sum_{n=0}^{\infty} 3(1)^n \implies$ سری واگرا

لذا فاصله همگرایی برابر است با $I = (1, 3)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

سری همگرا است

لذا شعاع همگرایی $R=\infty$ می باشد و فاصله همگرایی $I=\mathbb{R}$