حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری:

سری توانی: سری بصورت زیر را سری توانی حول x_0 می نامیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

درصورتیکه $x_0=0$، این سری را، سری توانی حول نقطه صفر می نامیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

برای هر سری توانی یکی از 3 وضع زیر برقرار است:

① سری فقط در x_0 همگرا است.

② سری برای هر $x\in\mathbb{R}$ همگرا است.

③ عدد حقیقی مانند R موجود است، برای xهایی که $|x-x_0|<R$ سری همگرا و برای xهایی که $|x-x_0|>R$ سری واگرا می باشد.

درقضیه فوق، R شعاع همگرایی سری توانی است و x_0 مرکز همگرایی سری توانی نام دارد.

تذکر:

فاصله همگرایی در سری توانی فوق ممکن است شامل نقاط x_0+R ، x_0-R باشد یا نباشد

درواقع نصف طول فاصله ی همگرایی، شعاع همگرایی نام دارد.

مشتق گیری و انتگرال گیری از سری های توانی:

اگر یک سری توانی حول نقطه x_0 با شعاع همگرایی R همگرا باشد، دراینصورت انتگرال و مشتق آن نیز همگرا هستند.

قضیه: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر بازه ی $(-R,R)$ به تابع $f(x)$ همگرا شود، دراینصورت f بر $(-R,R)$ مشتق پذیر است و داریم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

و f بر $(-R, R)$ انتگرال پذیر است:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots$$

مثال: به کمک قضیه فوق سری توانی تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را بدست آورید.

می دانیم که $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots \qquad -1 < t < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

تذکر: اگر یک سری توانی در یک فاصله همگرایی به تابع $f(x)$ همگرا شود حتماً بسط تیلور تابع می باشد.

یادآوری: بسط تیلور یا سری تیلور اگر $f(x)$ از هر مرتبه ای در x_0 مشتق پذیر باشد در اینصورت سری تیلور تابع f حول $x = x_0$ بصورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

اگر $x_0 = 0$، بسط فوق را بسط مک لورن می گویند.

سری‌های مک لورن مهم:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

تعریف: تابع f در نقطه‌ی x_0 تحلیلی می‌گوییم هرگاه حول این نقطه دارای سری تیلور باشد.

نقطه عادی: نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

گویند هرگاه هر یک از توابع $\frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ ، $0 \leqslant i \leq n$ و $\frac{F(x)}{a_n(x)}$ در x_0 تحلیلی باشند در غیر اینصورت x_0 را نقطه غیر عادی یا منفرد معادله معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

مثال: نقطه $x=0$ در معادله‌ی زیر

$$(x^2+1)y'' - 4xy' + 2y = x+3$$

را بررسی کنید.

$$y'' - \frac{4x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = \frac{x+3}{x^2+1}$$

با توجه به اینکه ضرایب y'' و y' و y چندجمله ای می‌باشند پس نقطه عادی است.

$$(x^2-4)y'' + xy' + 2y = 0$$

$$y'' + \frac{x}{x^2-4}y' + \frac{2}{x^2+4}y = 0$$

$x=\pm 2$ نقاط غیرعادی اند.

$$\sin x\, y'' + x^2 y' + y = 0$$

$$y'' + \frac{x^2}{\sin x}y' + \frac{y}{\sin x} = 0$$

$x=k\pi$ نقطه غیرعادی است، بی نهایت غیرعادی داریم.

قضیه: هرگاه نقطه x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل خطی باشد آنگاه این معادله در نقطه x_0 دارای یک جواب بصورت سری توانی است، یعنی جواب معادله در x_0 تحلیلی است.

قضیه فوق به ما امکان می دهد که جواب را بصورت سری در نظر گرفته وسپس به کمک معادله دیفرانسیل داده شده ضرایب a_n را تعیین کنیم.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

برای تعیین ضرایب مجهول در سری توانی فوق دو روش وجود دارد.

روش اول: روش مشتقات متوالی: مشتقات تابع را در نقطه x_0 بدست می آوریم وباتوجه به اینکه سری توانی حول نقطه x_0 درواقع همان بسط تیلور جواب است داریم

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

درعمل فقط چند جمله ی اول بسط را پیدا می کنیم

مثال: $(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 1$

حل: با توجه به معادله و قرار دادن $x=0$ در آن

$$-1\, y''(0) - 0y' + y(0) = 0 \rightarrow -y''(0) + 1 = 0 \rightarrow y''(0) = 1$$

برای بدست آوردن $y^{(3)}(0)$، ابتدا از معادله مشتق گرفته و سپس $x=0$ را جایگذاری می کنیم

$$y'' + (x-1)y^{(3)} - y' - xy'' + y' = 0$$

$$y''(0) + (x-1)y^{(3)} - y' - xy'' + y' = 0$$

$$y''(0) - y^{(3)}(0) - y'(0) + y'(0) = 0$$

$$y^{(3)}(0) = 1$$

اگر این کار را ادامه دهیم $y^{(n)}(0) = 1$ خواهد شد بنابراین جواب بصورت

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

مثال: $e^x y' + (2x-1)y = \cos x \qquad y(0) = 1$

جواب حول نقطه $x=0$ را بدست آورید:

حل) چون در $x=0$، $\frac{2x-1}{e^x}$ و $\frac{\cos x}{e^x}$ تحلیلی هستند لذا صفر یک نقطه عادی معادله فوق است.

با قرار دادن $x=0$ در معادله داریم: $y'(0) - y(0) = \cos(0) \rightarrow y'(0) = 2$

سپس از معادله مشتق می گیریم و داریم: $e^x y' + e^x y'' + 2y + (2x-1)y' = -\sin x$

$$y'(0) + y''(0) + 2y(0) - y'(0) = 0$$

$$2+y''(0)+2-2=0 \rightarrow y''(0)=-2$$

$$y(x)=1+2x-2\frac{x^2}{2}+\cdots=1+2x-x^2+\cdots$$

مثال: مسئله زیر را که فاقد شرط اولیه است با کمک روش مشتقات متوالی حول نقطه $x=0$ حل نمایید.

$$y''+y'\sin x+e^x y=0$$

$$y''(0)+y'(0)\times 0+y(0)=0 \rightarrow y''(0)=-y(0)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y^{(3)}+y''\sin x+y'\cos x+e^x y+e^x y'=0$$

$$\xrightarrow{x=0} y^{(3)}(0)+y'(0)+y(0)+y'(0)=0 \rightarrow y^{(3)}(0)=-(y(0)+2y'(0))$$

با مشتق گیری مجدد و قرار دادن $x=0$ داریم:

$$y^{(4)}(0)=2(y(0)-y'(0))$$

بنابراین جواب معادله بصورت زیر است:

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2}(-y(0))+\frac{x^3}{3!}(-y(0)-2y'(0))$$

$$+\frac{x^4}{4!}(2y(0)-2y'(0))+\cdots$$

$$y(x)=y(0)\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\cdots\right)+y'(0)\left(x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\cdots\right)$$

روش دوم: سریها (ضرایب نامعین): در این روش جواب را بصورت

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

درنظر گرفته و پس از قرار دادن $y(x)$ در معادله ضرایب a_n را تعیین می کنیم

مثال: جواب از نوع سری توانی معادله‌ی زیر را حول نقطه‌ی $x=0$ بدست آورید.

$$(2x+1)y' - 2y = 0$$

حل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$(2x+1)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\text{تغییر اندیس}} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^n + a_1 - 2a_0 = 0$$

$$(a_1 - 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2n a_n + (n+1)a_{n+1} - 2a_n\right) x^n = 0$$

$$a_1 - 2a_0 = 0 \rightarrow a_1 = 2a_0$$

$$(2n-2)a_n + (n+1)a_{n+1} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{-(2n-2)}{n+1} a_n \qquad n \geq 1$$

$$n=1 \rightarrow a_2 = \frac{-0}{n+1} a_n = 0$$

$$a_3 = 0 \;,\; a_4 = 0 \;,\; \dots$$

$$y(x) = a_0 + 2a_0 x \rightarrow a_1 x$$

تذکر: می‌توان برای بدست آوردن ضرایب به n ها عدد داد.

مثال: جواب سری توانی حول نقطه $x_0=0$ را بدست آورید.

$$y' - 3xy = x \quad , \quad y(0) = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = x$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x$$ [تغییر اندیس]

$$\rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} - 3a_{n-1} \right] x^n = x$$

$$a_1 = 0$$

$$n=1 \longrightarrow (2a_2 - 3a_0)x = x \rightarrow 2a_2 - 3a_0 = 1 \rightarrow a_2 = \frac{3a_0+1}{2}$$

$$n \geq 2 \ , \ (n+1)a_{n+1} - 3a_n - 1 = 0 \qquad a_{n+1} = \frac{3a_{n-1}}{n+1}$$

$$a_3 = \frac{3a_1}{3} = a_1 = 0$$

$$a_4 = \frac{3a_2}{4} = \frac{3}{4 \times 2} = (3a_0+1)$$

$$a_5 = \frac{3a_3}{5} = 0 \qquad a_6 = \frac{3a_4}{6} = \frac{9}{6 \times 4 \times 2} (3a_0+1)$$

$$a_{2n+1}=0 \quad , \quad a_{2n}=\frac{3^{n-1}\,(3a_0+1)}{(2n)(2n-1)\cdots\times 6\times 4\times 2}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\frac{a_2}{n!}x^{2n}$$

$$y(0)=0 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big|_{x=0}=0 \longrightarrow a_0=0 \quad , a_2=\frac{1}{2}$$

مثال: جواب از نوع سری معادله دیفرانسیل حول نقطه صفر را بدست آورید:

$$y''+y=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n=0$$

$$\longrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0 \longrightarrow a_{n+2}=\frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n\geqslant 0$$

$$a_2=\frac{-a_0}{1\times 2} \quad , \quad a_3=\frac{-a_1}{2\times 3} \quad , \quad a_4=\frac{-a_2}{3\times 4}=\frac{a_0}{1\times 2\times 3\times 4} \quad , \quad a_5=\frac{-a_3}{4\times 5}=\frac{a_1}{2\times 3\times\cdots\times 5}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

مثال: $y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

هدف از تغییر اندیس این است که توان x ها رو یکی کنیم.

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= x^2 + 2x + 2$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر اندیس}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= x^2 + 2x + 2$$

$$2a_2 + 6a_3 x + 4a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n-1) a_{n-1} + 4a_{n-1}\right] x^n$$

$$= 2 + 2x + x^2$$

با مقایسه دو طرفین رابطه داریم $\Rightarrow 2a_2 = 2 \rightarrow a_2 = 1$

$$(6a_3 + 4a_0) = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow (4)(3) a_4 - 2a_1 + 4a_1 = 1 \rightarrow 12a_4 + 2a_1 = 1$$

ضرایب x^n برابر صفر است $\rightarrow n \geq 3$ ، $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (6-2n)a_{n-1} = 0$

$$a_{n+2} = \frac{-(6-2n)\,a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

$$\rightarrow a_2 = 1 \;,\; a_3 = \frac{2-4a_0}{6} \;,\; a_4 = \frac{1-2a_1}{12}$$

$$y_0 = a_0\left(1 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{45}x^6 - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{2}{6}x^4 - \frac{1}{63}x^7 - \dots\right)$$

جواب معادلات دیفرانسیل به کمک سری فروبنیوسی :

نقطه منفرد منظم : هرگاه $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم یا غیرعادی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام، زیر باشد، در اینصورت اگر هر یک از توابع $(x-x_0)^{n-i}\frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ و $0 \leq i \leq n$ ، $(x-x_0)^n\frac{f(x)}{a_n(x)}$ در $x = x_0$ تحلیلی باشند، یعنی در همسایگی x_0 دارای بسط تیلور باشند، آنگاه نقطه $x = x_0$ را منفرد منظم می‌گوییم و در غیر اینصورت منفرد نامنظم می‌گوییم.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

بنابراین نقطه $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل فوق است، هرگاه حدود زیر موجود باشد :

$$\lim_{x \to x_0}(x-x_0)^n\frac{f(x)}{a_n(x)} \quad , \quad \lim_{x \to x_0}(x-x_0)^{n-i}\frac{a_i(x)}{a_n(x)} \;,\; 0 \leq i \leq n$$

در حالت خاص معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

با تقسیم طرفین بر $a_2(x)$ و تعریف

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \quad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \quad R(x) = \frac{F(x)}{a_2(x)}$$

معادله فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

نقطه $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم معادله فوق است هرگاه حدود زیر موجود باشند.

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x), \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 Q(x), \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 R(x)$$

مثال: نوع نقطه $x=-1$ را برای معادله زیر تعیین کنید.

$$(x+1)^2 y'' + (x^2-1)y' + xy = 0$$

$$y'' + \frac{x^2-1}{(x+1)^2}y' + \frac{x}{(x+1)^2}y = 0$$

$x=-1$، نقطه منفرد معادله فوق است.

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\right) = -2$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2\left(\frac{x}{(x+1)^2}\right) = -1$$

چون حدها موجود هستند پس منظم است.

مثال: نوع نقطه $x=0$ در معادله زیر تعیین کنید.

$$x^2 y'' + \sin(x) y' + (x-1) y = x^3 \cos x$$

$$y'' + \frac{\sin(x)}{x^2} y' + \frac{x-1}{x^2} y = x \cos x$$

در $x=0$ منفرد است.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1 , \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 (x-1)}{x^2} = -1 , \quad \lim_{x \to 0} x^2 \, x \cos x = 0$$

حدها موجود هستند پس منظم است.

حل معادله دیفرانسیل حول نقطه منفرد منظم:

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + P(x) y + Q(x) y = 0$$

اگر $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم باشد آنگاه معادله دارای جوابی بصورت

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

می باشد. به این نوع جواب، جواب از نوع سری فروبنیوسی معادله دیفرانسیل می گویند.

همان طور که مشخص است این معادله باید ۲ جواب مستقل خطی داشته باشد، برای یافتن جواب دوم و r مناسب باید روی معادله شاخص (مشخصه) یا اندیسی معادله دیفرانسیل فوق بحث کنیم. معادله مشخصه بصورت زیر است:

$$r(r-1) + r p_0 + q_0 = 0$$

که در آن

$$P_0 = \lim_{x \to x_0} (x-x_0) P(x)$$

$$q_0 = \lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 q(x)$$

نسبت به ریشه های معادله مشخصه حالت های مختلفی داریم:

1) فرض کنید r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه باشند و $r_1 \geq r_2$:

حالت اول) اگر $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2$ عدد صحیح نباشد در اینصورت هر دو جواب معادله بصورت سری فروبینوسی زیر است:

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

حالت دوم) اگر $r_1 = r_2$، یعنی معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف باشد در اینصورت جواب اول معادله سری فروبینوس، جواب دوم لگاریتمی است.

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

نکته: اگر جواب معادله y_1 بصورت صریح بدست بیاید به کمک فرمول آبل می توان $y_2(x)$ را محاسبه کرد.

حالت سوم) اگر $r_1 \neq r_2$ و تفاضل آنها عددی صحیح شود در اینصورت جواب اول بصورت

سری فروبنیوسی و جواب دوم ممکن است بصورت فروبنیوسی و یا شامل لگاریتم باشد.

$$y_1 = (x-x_0)^{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = \alpha\, y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

مثال: جواب به فرم سری توانی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x=0$ را بدست آورید

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

$$y'' + \frac{2}{4x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$$

$x=0$ نقطه منفرد است

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$x=0$ منفرد منظم است، پس جواب بصورت سری فروبنیوسی است

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \left(\frac{1}{4x}\right) = 0$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری در معادله:

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

با تغییر اندیس $n \to n-1$

در سری تساوی داریم

$$\to 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)a_n x^{n+r-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$2r(2r-1)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2(n+r)(2n+2r-1)a_n + a_{n-1}\right)x^{n+r-1} = 0$$

$$2r(2r-1)=0 \longrightarrow a_0 \neq 0 \longrightarrow 2r(2r-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=\frac{1}{2} \end{cases}$$

معادله مشخصه

$$2(n+r)(2n+2r-1)a_n + a_{n-1} = 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+r)(2n+2r-1)} \qquad n \geq 1$$

$$r=0 \longrightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{2n(2n-1)} \qquad n \geq 1$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{2\times 1\times 1} = \frac{-a_0}{2} \qquad a_2 = \frac{a_0}{4!}$$

$$a_3 = \frac{-a_0}{6!} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}a_0$$

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sqrt{x}^{2n}$$

$$= a_0 \cos(\sqrt{x})$$

جواب دوم معادله را می توان به روش آبل بدست آورد. و یا اینکه به کمک سری بدست آورد:

$$r = \frac{1}{2} \longrightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+\frac{1}{2})(2n}$$

$$a_1 = \frac{-a_0}{2\times\frac{3}{2}\times 2} = -\frac{a_0}{3!}$$

$$a_2 = \frac{-a_1}{2\times\frac{5}{2}\times 4} = \frac{a_0}{5\times4\times3!} = \frac{a_0}{5!}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_0$$

$$y_2(x) = a_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{\frac{2n+1}{2}}\right) = a_0 \sin\sqrt{x}$$

$$y(x) = c_1\cos\sqrt{x} + c_2\sin\sqrt{x}$$

جواب نهایی

مثال: جواب به فرم سری توانی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x=0$ بدست آورید.

$$xy'' - 2y' + y = 0$$

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\left(-\frac{2}{x}\right) = -2 \qquad \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{x} = 0$$

لذا $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

باجایگذاری در معادله

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}}_{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-3) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$r(r-3) a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-3) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$r(r-3) a_0 = 0$ معادله مشخصه $a_0 \neq 0$

$r_1 = 3 \; , \; r_2 = 0$

$r = r_1 = 3$ چون 3 ریشه بزرگتر است

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(n+3) a_n + a_{n-1}] x^{n+r-1} = 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(n+3)} \qquad a_1 = -\frac{a_0}{4} , \; a_2 = -\frac{a_1}{10} = \frac{a_0}{40}$$

 $a_3 = -\frac{a_0}{\ldots}$

$$y_1 = a_0 x^3 \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{720} + \cdots\right)$$

اگر $a_0 = 1$ فرض کنیم، آنگاه:

$$y_1 = x^3 \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{720} + \cdots\right)$$

باتوجه به اینکه $r_1 - r_2 = 3$ که به اعداد طبیعی تعلق دارد، بنابراین جواب دوم به فرم:

$$y_2 = \alpha y_1 Ln(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \alpha y_1 Ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

حال باید α را بدست آوریم، در ابتدا با قرار دادن $r=0$ در رابطه زیر داریم:

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{(n+r)(n+r-3)}$$

$$r=0 \longrightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{n(n-3)} \qquad a_1 = \frac{-a_0}{0}$$ تعریف نشده

لذا باید Ln در y_2 موجود باشد. حال y_2 را در معادله جایگذاری کرده و α را بدست می‌آوریم.

$$y = \alpha y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$y' = \frac{\alpha}{x} y_1 + \alpha y_1' \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

$$y'' = -\frac{\alpha}{x^2} y_1 + \frac{\alpha}{x} y_1' + \alpha y_1'' \ln x + \frac{\alpha}{x} y_1' + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\left(-\frac{\alpha}{x}y_1+2\alpha y_1'+\alpha x y_1''\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_n x^{n-1}\right)$$

$$-\left(\frac{2\alpha}{x}y_1+2\alpha y_1'\ln x+2\sum_{n=0}^{\infty}n\,b_n x^{n-1}\right)$$

$$+\left(\alpha y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=0$$

حال همه جملاتی که شامل $\ln x$ هستند را در کنار هم قرار داده و از $\ln x$ فاکتور می‌گیریم

لذا داریم:

$$\alpha\underbrace{(xy_1''-2y_1'+y_1)}_{\text{صفر چون }y_1\text{ جواب معادله است}}\ln x+2\alpha y_1'-3\frac{\alpha}{x}y_1+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-3)b_n x^{n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=0$$

$$2\alpha\left(3x^2-x^3+\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{120}+\cdots\right)-3\alpha\left(x^2-\frac{x^3}{4}-\frac{x^5}{720}+\cdots\right)$$

$$+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}n(n-3)b_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n}_{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n(n-3)b_n+b_{n-1}\right)x^{n-1}}=0$$

ضریب x^{-1} : $0\times b_0=0$

ضریب x^0 : $1(1-3)b_1+b_0=0\ \longrightarrow\ b_1=\frac{b_0}{2}$

ضریب x : $2(2-3)b_2+b_1=0\ \longrightarrow\ b_2=\frac{b_0}{4}$

ضریب x^2 : $6\alpha-3\alpha+0\,b_3+b_2=0\ \longrightarrow\ \alpha=-\frac{b_2}{3}=-\frac{b_0}{12}$

x^3 ضریب : $-2\alpha + \frac{3}{4}\alpha + 4b_4 + b_3 = 0$

$$b_4 = -\frac{b_3}{4} - 5\frac{a_0}{192}$$

x^4 ضریب : $\frac{\alpha}{4} - \frac{3\alpha}{40} + 10b_5 + b_4 = 0$

$$b_5 = \frac{b_3}{40} + \frac{13}{3200}a_0$$

تذکر: b_3 در بالا یک پارامتر آزاد است و چون در مسئله با اضافه شدن b_3 به عنوان پارامتر آزاد، 3 پارامتر آزاد داریم لذا b_3 نمی‌تواند جواب جدیدی ایجاد کند و می‌تواند صفر در نظر گرفته شود پس.

$$y_2 = -\frac{b_0}{12}y_1 \ln x + b_0\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{192} - \frac{13x^5}{3200} + \cdots\right)$$

$$+ b_0^3 x^3 \underbrace{\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{40} - \cdots\right)}_{y_1}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$