

1- به کمک انتگرال معین، مساحت های مجموع زیر را محاسبه نمایید.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \left(1 + \cos\left(\frac{n}{2n}\right) + \cos\left(\frac{2n}{2n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1)n}{2n}\right) \right)$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right)$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)(n+2)\dots(n+n)]^{1/n}}{n} \quad \left[\text{راستی: ابتدا از حد فوق } n \text{ بگیری} \right]$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^3} + \frac{2n}{(n+2)^3} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^3} \right)$$

2- مساحت سطح محصور بین دو منحنی داده شده را به دست آورید:

$$1) y = \sqrt{x}, y = x^2$$

$$2) y = 4x - x^2, y = 3$$

$$3) y = x^2, y = x^3$$

$$4) y = 3 - x^2, y = x^2 - 5$$

3- در تمرینات زیر حجم جسم S را بیابید.

3.1 - جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y = x^2$ ، $y = 0$ ، و $x = 1$ حول محور x ما.

3.2 - جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y = x^2$ ، $y = 0$ ، و $x = 1$ حول محور y ما.

3.3 - جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ ، $0 \leq x \leq 1$ حول محور x ما.

3.4 - جسم حاصل از دوران ناحیه تمرین 3.3 حول محور y ما.

4- حجم جسم به دست آمده از دوران ناحیه داده شده R (الف) حول محور x ها و (ب) حول محور y ها را به دست آورید.

4.1 - R ناحیه محدود به $y = x(2-x)$ ، $y = 0$ و $0 \leq x \leq 2$ است.

4.2 - R ناحیه کرانه‌دار بین $y = x$ و $y = x^2$ است.

4.3 - R ناحیه کرانه‌دار بین $y = x$ و $x = 4y - y^2$ است.

4.4 - R ناحیه محدود به $y = 1 + \sin(x)$ و $y = 1$ از $x = 0$ تا $x = \pi$ است.

4.5 - R ناحیه محدود به $y = \frac{1}{1+x^2}$ ، $y = 2$ ، $x = 0$ و $x = 1$ است.

4.6 - R ناحیه کرانه‌دار بین $y = \frac{1}{x}$ و $3x + 3y = 10$ است.

5- در تمرینات زیر طول قوس صافی‌های داده شده را به دست آورید.

1) $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$ ، $[0, 8]$

2) $y^2 = (x-1)^3$ از $(1, 0)$ تا $(2, 1)$

3) $y^3 = x^2$ از $(-1, 1)$ تا $(1, 1)$

4) $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ ، $[1, 4]$

5) $y = \cosh(x)$ ، $[0, a]$

6) $y = \ln(x)$ ، $[1, e]$

7) $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ، $[2, 4]$

8) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln(x)$ ، $[1, e]$

6- همگرایی یا واگرایی انتگرال نامتناهی زیر را بررسی کنید (با استفاده از تعریف)

1) $\int_3^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2/3}} dn$

3) $\int_2^{\infty} \frac{1}{(n-1)^3} dn$

2) $\int_0^{\infty} \frac{n}{1+2n^2} dn$

4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^4} dn$

7) همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید

1) $\int_0^{\infty} \frac{dn}{1+\sqrt{n}}$

2) $\int_0^{\infty} \frac{n^2}{x^5+1} dn$

3) $\int_0^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} dn$

4) $\int_0^{\infty} \frac{dn}{n\sqrt{n^2+1}}$

8) تابع گاما Γ به صورت زیر برای $x > 1$ تعریف می شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

الف) نشان دهید $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ و از آن نتیجه بگیرید که $\Gamma(n+1) = n!$ برای $n \in \mathbb{N}$.

ب) به کمک تعریف تابع گاما و خاصیت الف) مقدار انتگرال های زیر را حساب کنید.

1) $\int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx$

2) $\int_0^{\pi/2} (\tan^3(x) + \tan^5(x)) e^{-\tan^2(x)} dx$

3) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-3x^2} dx$

9 - هموای یا واکترای سری های عددی داده شده را بررسی کنید.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+4}\right) n^2$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln(n)^3}}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{-n}}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^4+1}}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^n}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$$

$$10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n}$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2}$$

$$14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{n^2}$$

10. فاصله هموای سری های توانی زیر را بیابید.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{n+1}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln(n)}{e^n}$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \ln(k)}{2+\sqrt{k}}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2^n (n^2+n)}$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n (\ln(n))^2}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$