ترکیبات

امیرحسین سبحانی

اصول شمارش

۱.۱.۲ تعریف (اصل جمع). اگر کار A را به $n_۱$ طریق و کار B را به $n_۲$ طریق بتوان انجام داد آنگاه کار A یا B را به $n_۱+n_۲$ طریق می‌توان انجام داد مشروط بر اینکه فقط یکی از دو کار صورت پذیرد.

به عنوان مثال اگر از محله A به محله B سه مسیر با خط اتوبوس و دو مسیر با تاکسی موجود باشد ونتوان همزمان از تاکسی و اتوبوس استفاده کرد به $۲+۳=۵$ طریق می‌توان از محله A به محله B رسید.

اصول شمارش

۲.۱.۲ تعریف (اصل ضرب)**.** *اگر کار A را به n_1 طریق و کار B را به n_2 طریق بتوان انجام داد آنگاه کار A و B را به $n_1 n_2$ طریق می‌توان انجام داد.*

به عنوان مثال اگر از شهر A به شهر B سه مسیر و ازشهر B به شهر C چهار مسیر موجود باشد، در این صورت بین شهر A و B $۴*۳ = ۱۲$ مسیر موجود است.

اصول شمارش

مثال: به چند طریق می‌توان یک کد چهار رقمی برای حساب عابر بانک انتخاب کرد؟

اصول شمارش

مثال: به چند طریق می‌توان یک کد چهار رقمی برای حساب عابر بانک انتخاب کرد؟

جواب:

$$\boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} = 10^4$$

مثال: به کمک اعداد 0، 3،5، و 8 چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

اصول شمارش

مثال: به چند طریق می‌توان یک کد چهار رقمی برای حساب عابر بانک انتخاب کرد؟

جواب:

$$\boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} \times \boxed{10} = 10^4$$

مثال: به کمک اعداد 0، 3،5، و 8 چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

جایگشت

۱.۲.۲ تعریف (جایگشت یا ترتیب). هر آرایش سطری از n شیئ متمایز را یک جایگشت از آنها گویند.

تعداد جایگشت های n شیئ متمایز را با $P(n)$ یا P^n و یا $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می دهند که برابر است با:

$$n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۲ \times ۱$$

۲.۲.۲ مثال. به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متفاوت را در یک قفسه کتابخانه قرار داد؟

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

فرمول استرلینگ: وقتی n بزرگ باشد از فرمول استرلینگ می‌توان جهت تقریب مقدار $n!$ کمک گرفت:

فرمول استرلینگ:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

برای استفاده از فرمول استرلینگ ابتدا لگاریتم تقریب را محاسبه می‌کنیم:

$$\ln(n!) \approx n(\ln(n)-1)+\frac{1}{2}(\ln(2\pi)+\ln(n))$$

مثال: مقدار دقیق و مقدار تقریبی $15!$ را به کمک فرمول استرلینگ محاسبه کنید.

$$15! = 1307674368000$$

$$\ln(15!) \approx 15(\ln(15)-1)+\frac{1}{2}(\ln(2\pi)+\ln(15)) = 27.8937$$

$$15! \approx 1300430722199$$

جایگشت

۵.۲.۲ مثال. ۶ کودک به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند؟

جایگشت

۵.۲.۲ مثال. ۶ کودک به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند؟

$$6\times5\times4\times3\times2\times1=6!=720$$

۶.۲.۲ مثال. ۴ خانم و ۳ آقا به چند طریق میتوانند در یک صف قرار بگیرند بطوریکه: خانم ها در کنارهم باشند؟ خانم ها در کنار هم و آقایان نیز در کنار هم باشند؟

جایگشت

۵.۲.۲ مثال. ۶ کودک به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند؟

$$6\times5\times4\times3\times2\times1=6!=720$$

۶.۲.۲ مثال. ۴ خانم و ۳ آقا به چند طریق میتوانند در یک صف قرار بگیرند بطوریکه: خانم ها در کنارهم باشند؟ خانم ها در کنار هم و آقایان نیز در کنار هم باشند؟

$$4!4!$$

$$2!3!4!$$

جایگشت

- مثال: 4 مرد و 2 خانم به چند طریق می‌توانند صف تشکیل دهند مشروط بر اینکه 2 خانم در ابتدا و انتهای صف باشند؟

جایگشت

- مثال: 4 مرد و 2 خانم به چند طریق می‌توانند صف تشکیل دهند مشروط بر اینکه 2 خانم در ابتدا و انتهای صف باشند؟

$$2!4!$$

مثال: به چند طریق می توان n شیء متمایز را روی یک دایره قرار داد؟

جایگشت

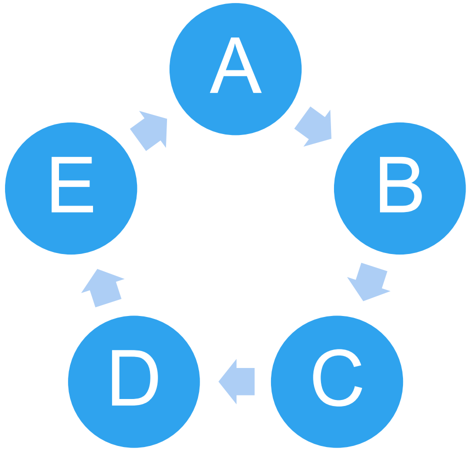
- مثال: 4 مرد و 2 خانم به چند طریق می‌توانند صف تشکیل دهند مشروط بر اینکه 2 خانم در ابتدا و انتهای صف باشند؟

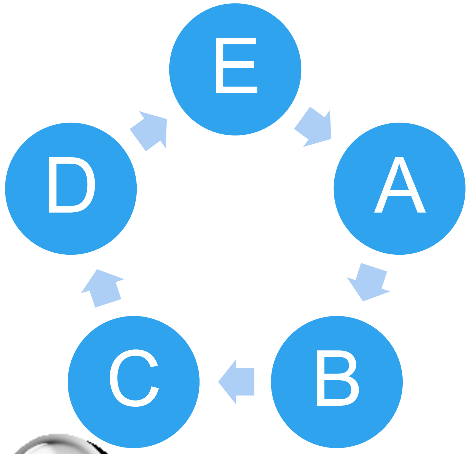
$$2!4!$$

مثال: به چند طریق می توان n شیء متمایز را روی یک دایره قرار داد؟

$$(n-1)!$$

جایگشت مستدیر





جایگشت

- مثال: 5 سنگ با رنگ های مختلف را به چند طریق می‌توان روی یک دایره آرایش داد؟

$$(5-1)!$$

- مثال: این 5 سنگ را به چند طریق می‌توان روی یک حلقه آرایش داد؟

جایگشت

- مثال: 5 سنگ با رنگ های مختلف را به چند طریق می‌توان روی یک دایره آرایش داد؟

$$(5-1)!$$

- مثال: این 5 سنگ را به چند طریق می‌توان روی یک حلقه آرایش داد؟

$$\frac{(5-1)!}{2}$$

- تذکر: در حلقه تفاوتی بین یک جایگشت وتصویر آینه ای آن وجود ندارد.

جایگشت

- مثال: به چند طریق می‌توان 5 کتاب از صد کتاب متمایز را در یک قفسه کتابخانه قرار داد؟

جایگشت

- مثال: به چند طریق می‌توان 5 کتاب از صد کتاب متمایز را در یک قفسه کتابخانه قرار داد؟

$$\boxed{100}\ \boxed{99}\ \boxed{98}\ \boxed{97}\ \boxed{96} = \frac{100!}{95!}$$

۳.۲.۲ تعریف (r_جایگشت). هر آرایش سطری از r شیئ از n شیئ متمایز را یک r_جایگشت گویند.

تعداد r_جایگشت ها از n شیئ متمایز را با $P(n,r)$ یا P_r^n و نمایش می دهند که برابر است با:

$$P(n,r) = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times (n-r+۱) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

جایگشت

مثال: 2 مهره آبی و سه مهره قرمز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد؟

جایگشت

مثال: 2 مهره آبی و سه مهره قرمز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد؟

1	1	2	2	3
1	2	2	1	3
1	3	2	1	2
1	3	2	2	1
1	1	2	3	2
1	2	2	3	1

$$\frac{5!}{3!2!}$$

جایگشت

۷.۲.۲ تعریف (جایگشت تعمیم یافته). گردایه ای از n شیء نه لزوما متمایز را در نظر بگیرید که در k دسته متمایز قرار دارند. اگر تعدا اعضای هر دسته برابر با n_i باشدکه $i = ۱,۲,...,k$ و اعضای هر دسته کاملا مشابه باشند در این صورت هر آرایش سطری از این n عنصر را یک جایگشت تعمیم یافته گوییم و تعداد جایگشت های تعمیم یافته این n عنصر برابر است با:

$$P(n : n_۱, n_۲, ..., n_k) = \frac{n!}{n_۱! n_۲! ... n_k!}$$

جایگشت

مثال: چهار مهره قرمز، 5 مهره سفید و 6 مهره آبی را با فرض اینکه مهره ها به غیر از رنگ تفاوتی با هم نداشته باشند، به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار داد؟

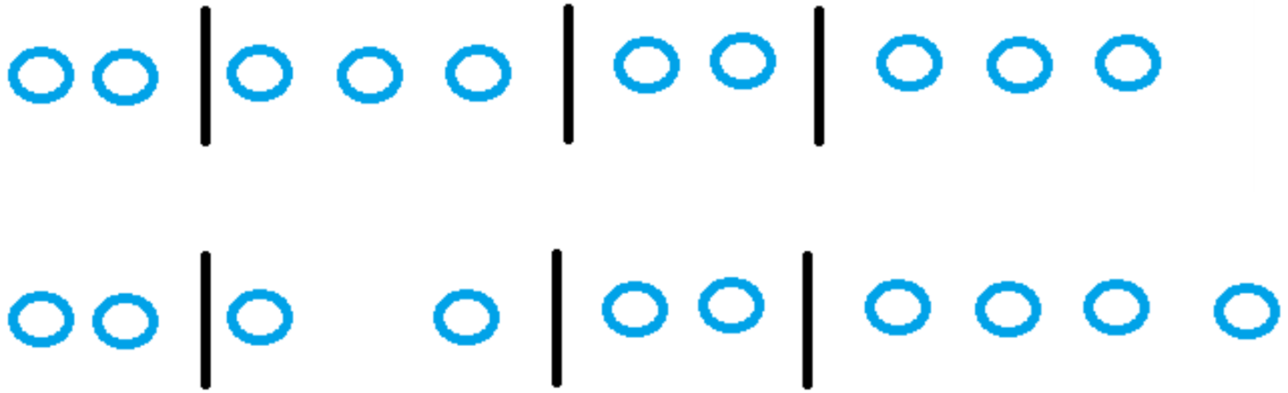
جایگشت

مثال: چهار مهره قرمز، 5 مهره سفید و 6 مهره آبی را با فرض اینکه مهره ها به غیر از رنگ تفاوتی با هم نداشته باشند، به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار داد؟

$$\frac{15!}{4!5!6!}$$

جایگشت

- مثال: به چند طریق می‌توان10 مهره یکسان را داخل 4 ظرف قرار داد؟



$$P(10+4-1;10,4-1)=\frac{(10+4-1)!}{10!(4-1)!}$$

جایگشت

- نتیجه مهم: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+....+x_m=n$ برابر است با:

$$P(n+m-1;n,m-1)=\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد؟

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد؟

جواب: جواب این مساله معادل با جواب های صحیح و غیر منفی معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + ... + x_5 = 12$$

که بنابر فرمول قبل برابر است با:

$$P(n+m-1; n, m-1) = P(12+5-1, 12, 5-1) = \frac{16!}{12!4!}$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد؟

$$x_1 + x_2 + ... + x_5 = 12$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد، مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد؟

جواب: ابتدا فرض می کنیم که به هر فرد یک بلیط داده ایم. در این صورت 7 بلیط باقی می‌ماند. لذا کافیست این بلیط ها را بین 5 نفر به دلخواه تقسیم کنیم که تعداد طرق پخش این بلیط ها معادل با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 7$$

که برابر است با:

$$P(n+m-1; n, m-1) = P(7+5-1, 7, 5-1) = \frac{11!}{7!4!}$$

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد و به نفر دوم و سوم هر کدام حداقل دو بلیط برسد؟

جواب:

جایگشت

مثال: به چند طریق می‌توان 12 بلیط را بین 5 نفر پخش کرد مشروط به اینکه به هر نفر حداقل یک بلیط برسد و به نفر دوم و سوم هر کدام حداقل دو بلیط برسد؟

جواب:

$$P(n+m-1;n,m-1)=P(5+5-1,5,5-1)=\frac{9!}{5!4!}$$

ترکیب

۱.۳.۲ تعریف (ترکیب). فرض کنید X یک مجموعه n عضوی باشد. در این صورت هر زیر مجموعه r عضوی از آنرا یک rـترکیب می‌گویند. تعداد rـ ترکیب های یک مجموعه n عضوی را با $C(n,r)$ نشان می‌دهند و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ترکیب

مثال: به چند طریق می‌توان از یک کلاس 15 نفره یک تیم 5 نفره ریاضی تشکیل داد؟

جواب:

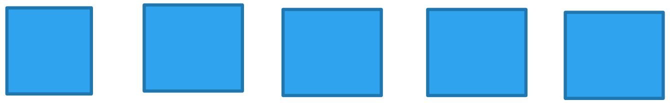
$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!}$$

در مثال زیر ارتباط جایگشت تعمیم یافته و ترکیب را می‌بینیم:

مثال: 3 مهره سفید و 2 مهره مشکی را به چند طریق می‌توان در کنارهم قرار داد؟

جواب: ابتدا 5 جایگاه را برای مهره ها در نظر میگیرم. حال سه جایگاه از این 5 جایگاه را برای قرار دادن مهره های سفید انتخاب می‌کنیم، طبیعتا دو مهره مشکی در دو جایگاه باقیمانده قرار می‌گیرد. لذا جواب مساله برابر است با:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = P(5;2,3)$$



ترکیب

برخی خواص ترکیب:

- با توجه به اینکه متمم هر یک زیر مجموعه k عضوی یک مجموعه n عضوی، مجموعه ای $n-k$ عضوی است، لذا:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

- چون تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی 2^n است، داریم:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

ترکیب

مثال: نشان دهید ضریب $x^k y^{n-k}$ در بسط $(x+y)^n$ برابر است با $\binom{n}{k}$.

حل: با توجه به اینکه

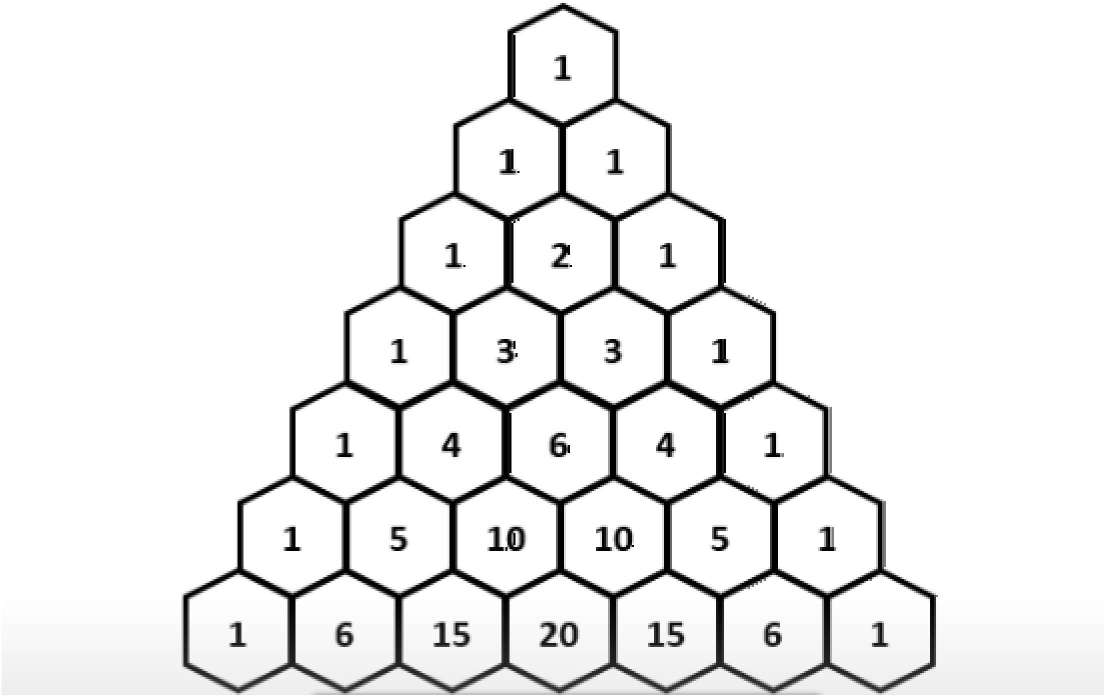
$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

برای حاصل شدن عبارت $x^k y^{n-k}$ باید k پرانتز در بالا رابه دلخواه انتخاب کرده و x آنرا در y بقیه پرانتزها ضرب نمودکه این کار به $\binom{n}{k}$ طریق امکان پذیر است.

بسط دو جمله ای نیوتن:

$$\boxed{(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n}$$

مثلث پاسکال:



ترکیب

در حالت کلی می‌توان دید که هر ترکیب و یا ترکیب تعمیم یافته در واقع یک جایگشت تعمیم یافته هستند. لذا ممکن است بسته به نگاه و ذهنیت فرد یک مساله به کمک ترکیب ویا جایگشت تعمیم یافته حل شود.

مثال: به چند طریق می‌توان از یک کلاس 11 نفره یک تیم دو نفره، یک تیم چهار نفره، و یک تیم 5 نفره انتخاب کرد به طوری که هر فرد دقیقا در یک تیم قرار بگیرد؟

ترکیب

در حالت کلی می‌توان دید که هر ترکیب و یا ترکیب تعمیم یافته در واقع یک جایگشت تعمیم یافته هستند. لذا ممکن است بسته به نگاه و ذهنیت فرد یک مساله به کمک ترکیب ویا جایگشت تعمیم یافته حل شود.

مثال: به چند طریق می‌توان از یک کلاس 11 نفره یک تیم دو نفره، یک تیم چهار نفره، و یک تیم 5 نفره انتخاب کرد به طوری که هر فرد دقیقا در یک تیم قرار بگیرد؟

جواب: ابتدا از بین 11 نفر 5 نفر را انتخاب می‌کنیم، سپس از بین 6 نفر باقیمانده 4 نفر رانتخاب می‌کنیم، در نهایت از بین 2 نفر باقیمانده باید دونفر رانتخاب کنیم لذا طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{11}{5}\times\binom{6}{4}\times\binom{2}{2}=\frac{11!}{5!\,6!}\times\frac{6!}{4!\,2!}\times\frac{2!}{2!\,0!}$$

$$=\frac{11!}{5!\,4!2!}=P(11;5,4,2)$$

ترکیب

۲.۳.۲ تعریف (ترکیب تعمیم یافته). گردایه ای از n شیء را می‌خواهیم در k گروه متمایز قرار دهیم که هر شیء دقیقا در یکی از این گروه ها قرار گیرد. اگر گروه اول دارای n_1 عضو، گروه دوم دارای n_2 عضو، ...،و گروه k ام دارای n_k عضو باشد. در این صورت n_1 شیء گروه اول را می‌توان به $C(n,n_1)$ ، n_2 عضو گروه دوم را می‌توان به $C(n-n_1,n_2)$ طریق، و به همین ترتیب همه گروه ها را پر می‌نماییم. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل راه هایی که برای انتخاب اعضای این گروه ها داریم برابر است با:

$$C(n;n_1,n_2,...,n_k) = C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)...C(n-n_1-n_2-...n_{k-1},n_k)$$

ترکیب

قضیه:

$$C(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)=P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

ترکیب

قضیه:

$$C(n;n_1,n_2,\dots,n_k)=P(n;n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

مثال: تعداد جایگشت های 3 مهره سفید، 4 مهره مشکی، و 5 مهره سبز رابیابید.

ترکیب

قضیه:

$$C(n;n_1,n_2,...,n_k)=P(n;n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

مثال: تعداد جایگشت های 3 مهره سفید، 4 مهره مشکی، و 5 مهره سبز رابیابید.

جواب:

$$\binom{12}{3}\binom{9}{4}\binom{5}{5}=\frac{12!}{3!4!5!}$$

ترکیب

نکته: با توجه به ارتباط بین جایگشت تعمیم یافته و ترکیب، تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$$

برابر است با:

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

مثال: یک باشگاه برای تولد 11 بازیکن خود جشن تولد می‌گیرد. تعداد جشن های تولدها به چند طریق ممکن است در ماه های سال پراکنده شده باشد؟

مثال: یک باشگاه برای تولد 11 بازیکن خود جشن تولد می‌گیرد. تعداد جشن های تولدها به چند طریق ممکن است در ماه های سال پراکنده شده باشد؟

جواب: 12 ماه سال را 12 ظرف و یازده بازیکن را یازده مهره در نظر می‌گیریم، بنابراین مساله ما معادل با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 11$$

که برابر است با:

$$\binom{11+12-1}{12-1} = \frac{22!}{11!11!}$$

ترکیب

مثال: به چند طریق می‌توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

ترکیب

مثال: به چند طریق می‌توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{12!}{4!4!4!}$$

ترکیب

مثال: به چند طریق می‌توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=\frac{12!}{4!4!4!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان دو تیم 3 نفره، یک تیم 4 نفره، و سه تیم 5 نفره از یک کلاس 25 نفره تشکیل داد، که هرفرد دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

ترکیب

مثال: به چند طریق می‌توان یک تیم 4 نفره فیزیک، یک تیم 4 نفره شیمی، و یک تیم 4 نفره ریاضی از بین 12 نفر تشکیل داد که هرکدام دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب:

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=\frac{12!}{4!4!4!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان دو تیم 3 نفره، یک تیم 4 نفره، و سه تیم 5 نفره از یک کلاس 25 نفره تشکیل داد، که هرفرد دقیقا در یک تیم قرار داشته باشند؟

جواب: (مساله افراز نامرتب)

$$\frac{25!}{(5!5!5!)3!4!(3!3!)2!}$$