احتمال :

تعریف آزمایش تصادفی : آزمایش یا فرآیندی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد و در شرایط یکسان، تکرار آزمایش لزوماً به نتایج یکسانی ختم نگردد، آزمایش را تصادفی می‌گویند. به عنوان مثال، نتیجه پرتاب یک سکه، انداختن یک تاس، کشیدن یک کارت از بین یک دسته کارت، میزان قند خون، آزمایش‌هایی تصادفی هستند.

فضای نمونه :

مجموعه تمام حالات ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گفته و آن‌را با S نمایش می‌دهیم.

در فضای نمونه هر حالت ممکن را یک برآمد یا یک نقطه نمونه‌ای گویند.

مثال : در پرتاب یک تاس وقتی عدد ظاهر شده روی آن مورد نظر است فضای نمونه برابر است با

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال : فضای نمونه در پرتاب یک سکه برابر است با :

$$S=\{T,H\}$$

T : خط   H : شیر

مثال : اگر آزمایش تصادفی تعیین جنسیت یک نوزاد باشد :

$$S=\{g,b\}$$

g : دختر   b : پسر

مثال : اگر آزمایش تصادفی نتیجه مسابقه اسب‌دوانی که بین 7 اسب که از یک تا هفت شماره‌گذاری شده‌اند باشد، فضای نمونه بصورت زیر خواهد بود :

S = { تمام جایگشت‌های $(1,2,3,\dots,7)$ }

مثلاً برآمد $(4,5,6,1,3,2)$ به این معنی است که اسب شماره دو مقام اول، شماره سه مقام دوم و ... شماره 4 آخر شده است.

مثال: فضای نمونه ای در انداختن یک جفت تاس بصورت زیر است:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \ldots, (2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), \ldots, (6,6)\}$$

مثال: اگر در بازی شیر یا خط سکه ای را سه بار پرتاب کنیم فضای نمونه بصورت زیر است:

$$S = \{TTT, THT, TTH, HTT, HTH, HHT, THH, HHH\}$$

در مثال های بالا فضای نمونه متناهی بودند.

مثال: فضای نمونه برای آزمایش پرتاب یک سکه تا زمانی که اولین شیر ظاهر شود بصورت زیر است:

$$S = \{H, TH, TTH, \ldots\}$$

★ این فضای نمونه یک فضای نمونه ای بی پایان ولی شمارای نامتناهی است.

تعریف فضای نمونه گسسته:

فضای نمونه را زمانی که مجموعه ای متناهی یا شمارای نامتناهی باشد، گسسته گوییم و در غیر اینصورت فضای نمونه را پیوسته گوییم.

مثال: فضای نمونه سرعت متوسط یک ماشین که از شهر A به شهر B حرکت می کند بصورت زیر است:

$$S = \{x \mid x > 0\}$$

وضوحاً S در این مثال ناشمارا است پس S یک فضای نمونه پیوسته است.

تعریف پیشامد : هر زیر مجموعه از فضای نمونه مانند E را یک پیشامد می گوییم. معمولاً پیشامدها را با حروف بزرگ نمایش می دهیم. پیشامد تک عضوی مانند $\{e\}$ را پیشامد ساده می گوییم و آنرا با همان e نمایش می دهیم. پیشامدی که بیش از یک عضو داشته باشد را پیشامد مرکب گوییم.

پیشامد $\varnothing$ را محال و پیشامد S را حتمی گوییم.

مثال : پیشامد اینکه در ریختن دو تاس مجموع اعداد ظاهر شده $\underline{7}$ باشد را بیابید.

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

گوییم پیشامد E رخ می دهد هرگاه نتیجه آزمایش تصادفی عضوی از مجموعه E باشد.

مشابه مجموعه های می توان اشتراک، اجتماع، تساوی، تفاضل و متمم پیشامدها را تعریف کرد.

تعریف پیشامدهای مساوی :

دو پیشامد E_1 و E_2 را مساوی گوییم هرگاه $E_1 \subset E_2$ و $E_2 \subset E_1$، به بیان دیگر هرگاه وقوع E_1، وقوع E_2 و وقوع E_2، وقوع E_1 را نتیجه دهد.

تعریف اجتماع دو پیشامد :

اجتماع دو پیشامد E_1 و E_2 پیشامدی است که شامل همه اعضای E_1 و E_2 باشد. پیشامد $E_1 \cup E_2$ رخ می دهد اگر حداقل یکی از دو پیشامد E_1 یا E_2 رخ دهد.

$$E_1 \cup E_2 = \{x \mid (x \in E_1) \vee (x \in E_2)\}$$

تعریفِ اشتراک دو پیشامد :

اشتراک دو پیشامد E_1 و E_2 که آنرا با $E_1 \cap E_2$ نمایش می دهند، پیشامدی است که هر عضو آن هم متعلق به پیشامد E_1 و هم متعلق به پیشامد E_2 است.

$$E_1 \cap E_2 = \{x \mid (x \in E_1) \wedge (x \in E_2)\}$$

پیشامد $E_1 \cap E_2$ رخ می دهد، هرگاه هم پیشامد E_1 و هم پیشامد E_2 رخ دهد.

تعریفِ پیشامدهای ناسازگار :

دو پیشامد را ناسازگار گوییم هرگاه اشتراک آنها تهی باشد. یعنی نتوانند همزمان رخ دهند.

مثال : پیشامدهای E_1 و E_2 در پرتاب تاسی که به شکل زیر تعریف شده اند وضوحاً ناسازگارند:

$$E_1 = \{1, 2, 5\} \qquad E_2 = \{3, 4\}$$

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

توجه : به بیان ریاضی مجموعه های E_1 و E_2 مجزا هستند.

تعریفِ تفاضل دو پیشامد :

تفاضل پیشامد E_2 از E_1 را با $E_1 - E_2$ نمایش می دهند و بصورت زیر تعریف می شود:

$$E_1 - E_2 = \{x \in E_1 \mid x \notin E_2\}$$

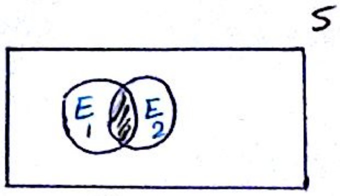
تعریفِ متمم یک پیشامد :

متمم پیشامد E را با E^c یا E' نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

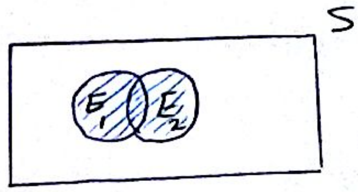
$$E' = \{x \in S \mid x \notin E\} = S - E$$

تذکر:

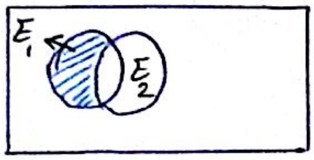
$$E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2'$$



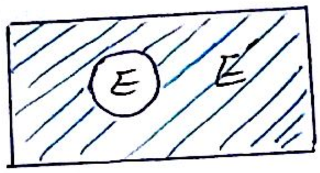
$E_1 \cap E_2$



$E_1 \cup E_2$



$E_1 - E_2$



E^c

یادآوری:

قانون جابجایی:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

قانون شرکت پذیری:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

قانون پخش پذیری:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

قانون دمورگان:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

تعریف احتمال:

احتمال رخ دادن یک پیشامد مانند A را عددی بین 0 و 1 تعریف کرده که میزان شانس رخ دادن آن پیشامد را نشان می دهد. به این صورت که هرچه این عدد به یک نزدیک تر باشد امکان رخ دادن آن بیش تر است و هرچه به صفر نزدیک تر باشد احتمال رخ دادن آن کمتر است. تابع اندازه احتمال را با P نمایش داده و احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می دهیم.

اصول موضوعه احتمال: اندازه احتمال P باید در اصول موضوعه زیر صدق کند:

1) $P(S)=1$ ،

2) برای هر پیشامد مانند A، $P(A)\geq 0$

3) اگر A_1، A_2، .....، A_n پیشامدهای دوبه دو ناسازگار (مجزا) باشند، یعنی برای هر i و j که $i\neq j$، $A_i \cap A_j = \emptyset$، در اینصورت:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

نتایج:

1) $P(\emptyset)=0$

اثبات) $1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$

$\Rightarrow 1 = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2) $P(A') = 1 - P(A)$

اثبات) $1 = P(S) = P(A \cup A')$

$= P(A) + P(A')$ بنا بر اصل سوم

$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$

3) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

اثبات) $A = (A-B) \cup (A \cap B)$

$\Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$ اصل سوم

$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

4) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

اثبات) $A\cup B = (A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A-B) + P(B-A) + P(A\cap B)$ اصل سوم

$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) + P(A\cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

5) اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $P(A) \leqslant P(B)$

اثبات) $B = A\cup(B-A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B-A)$

طبق اصل **2**، $P(B-A) \geqslant 0$ لذا $P(A) \leqslant P(B)$

6) $P(A) \leqslant 1$

با توجه به اصل (5) و اینکه $A \subseteq S$ لذا $P(A) \leqslant 1$

تعبیر احتمال (فضای همشانس و متناهی) ؛ اگر فضای نمونه آزمایش تصادفی متناهی باشد، احتمال رخ دادن همه برآمدها باهم مساوی باشند، یعنی فضای نمونه همشانس باشد درانصورت احتمال رخ دادن هر پیشامد مانند A بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$N(A)$ ؛ تعداد اعضای مجموعه A

$N(S)$ ؛ تعداد اعضای فضای نمونه

مثال: دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر 6 باشد چقدر است؟
احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از 5 باشد چقدر است؟ کمتر از 8 شود چطور؟

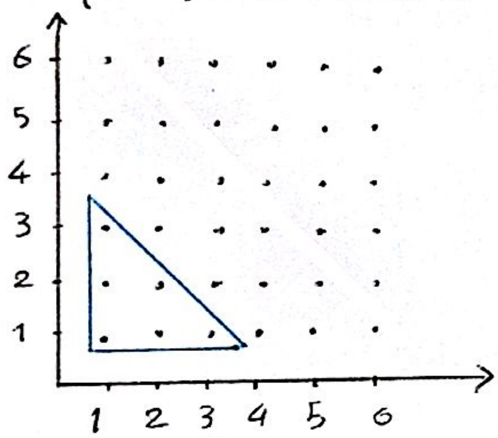
$$S = \{(x, y) \mid x = 1, 2, \dots, 6 \ , \ y = 1, 2, \dots, 6\}$$

A: پیشامد اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر 6 باشد

$$A = \{(1,5), (5,1), (3,3), (4,2), (2,4)\} \qquad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

B: پیشامد اینکه مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از 5 شود.

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\} \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$



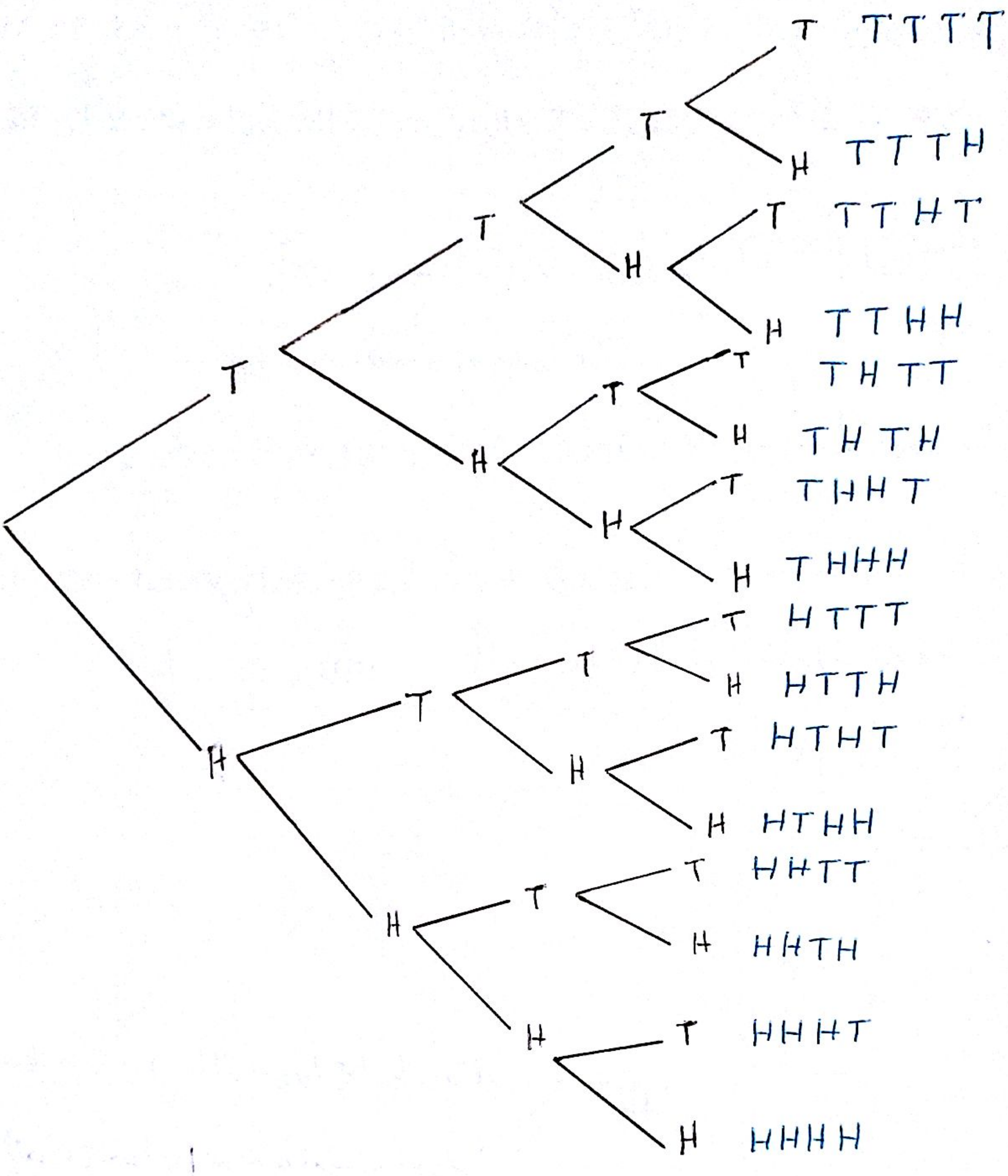
مثال: سکه نااریب را چهار بار پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه را بدست آورید؟

ب) احتمال اینکه دو شیر مشاهده کنیم چقدر است؟

ج) احتمال اینکه حداقل دو شیر مشاهده کنیم چقدر است؟

د) احتمال اینکه پرتاب سوم شیر باشد چقدر است؟



الف) $S = \{TTTT, TTTH, TTHT, TTHH, THTT, THTH, THHT, THHH, HTTT, HTTH, HTHT, HTHH, HHTT, HHTH, HHHT, HHHH\}$

ب) A : پیشامد مشاهده دو شیر

$A = \{TTHH, THTH, THHT, HTTH, HTHT, HHTT\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ج) C: پیشامد اینکه حداقل دو شیر مشاهده شود.

C': پیشامد اینکه حداکثر یک شیر مشاهده کنیم

$$C' = \{TTTT, TTTH, TTHT, THTT, HTTT\}$$

$$P(C') = \frac{5}{16} \Rightarrow P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

د) $\frac{1}{2}$

مثال: سوال قبل را به کمک فرمول های شمارش حل کنید.

الف) $n(S) = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} = 2^4 = 16$

ب) A پیشامد مشاهده دو شیر

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ج) C: پیشامد اینکه حداقل دو شیر مشاهده کنیم

C': پیشامد اینکه حداکثر یک شیر مشاهده کنیم

$$P(C') = \frac{n(C')}{n(S)} = \frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1}}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(C) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: یک کمیته 5 نفره از بین یک گروه شامل 6 مرد و 9 زن به چند طریق می تواند به طور کاملاً تصادفی انتخاب شود. احتمال اینکه این کمیته شامل 3 مرد و 2 زن باشد چقدر است؟

A : پیشامد اینکه این کمیته از 3 مرد و 2 زن تشکیل شود

$$n(S)=\binom{15}{5}$$

$$n(A)=\binom{6}{3}\binom{9}{2}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}=\frac{240}{1001}$$

مثال : از بین n فرد، یک تیم k نفره کاملاً شانسی انتخاب می‌شود. احتمال اینکه فرد خاصی در این تیم قرار بگیرد چقدر است؟

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}=\frac{k}{n}$$

مثال : یک تیم بسکتبال شامل 6 بازیکن سیاه پوست و 6 بازیکن سفیدپوست را در نظر بگیرید.

اگر 6 زوج (6 تیم دونفره) از بین این بازیکنان به تصادف انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد که هیچ بازیکن سیاه پوستی با بازیکن سفیدپوستی هم‌تیمی نشود؟

$$n(S)=\frac{\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\cdots\binom{2}{2}}{6!}=\frac{12!}{(2!)^6\,6!}$$ (افراز نامرتب)

A : پیشامد اینکه هیچ بازیکن سیاه‌پوستی هم بازی بازیکن سفید نشود. برای رخ دادن پیشامد A باید سه تیم دونفره از بازیکنان سفید و سه تیم دونفره از بازیکنان سیاه پوست داشته باشیم. لذا چون افراز ما نامرتب است و به کمک اصل ضرب:

$$n(A)=\left(\frac{6!}{(2!)^3\,3!}\right)\left(\frac{6!}{(2!)^3\,3!}\right)=\left(\frac{6!}{(2!)^3\,3!}\right)^2$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\left(\frac{6!}{2^3\,3!}\right)^2}{\left(\frac{12!}{2^6\,6!}\right)}=\frac{5}{231}=0.0216$$

مثال: اگر n فرد در یک اتاق حاضر باشند، چقدر احتمال دارد که تولد دو نفر آنها در یک روز نباشد؟

$$n(S) = (365)^n$$

A: پیشامد اینکه تولد هیچ دو فردی در یک روز سال نباشد.

$$n(A) = (365)(364)(363)\dots(365-n+1)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(365)(364)\dots\dots(365-n+1)}{(365)^n}$$

مثال: 3 خانم و 2 آقا یک صف تشکیل می دهند. احتمال اینکه:

الف) 3 خانم کنارهم ایستاده باشند چقدر است.

ب) آقایان در کنارهم و خانم ها در کنارهم باشند چقدر است.

$$n(S) = (3+2)! = 5!$$

الف) A: پیشامد اینکه 3 خانم کنارهم ایستاده باشند.

3 خانم را یک بسته درنظر می گیریم، لذا این بسته با 2 آقا، $3!$ جایگشت دارد، ازطرفی خود خانم ها باهم $3!$ جایگشت دارند. پس طبق اصل ضرب

$$n(A) = 3!\,3! \qquad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3!\,3!}{5!}$$

ب) خانم ها را یک دسته و آقایان را یک بسته درنظر می گیریم. لذا $2!$ باهم جایگشت دارند ازطرفی خانم ها باهم $3!$ و آقایان نیز با یکدیگر $2!$ جایگشت دارند پس

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3!\,2!\,2!}{5!}$$

مثال : 12 بلیط را بین 5 نفر طوری تقسیم می کنیم که به هر نفر حداقل یک بلیط برسد. احتمال آنکه به نفر دوم و سوم حداقل دو بلیط برسد چقدر است؟

$x_1+x_2+\dots+x_5=12$ ، $x_i \geq 1$ صحیح

$x_1+x_2+\dots+x_5=7$ ، $x_i \geq 0$ صحیح

$$n(S)=\binom{7+5-1}{5-1}=\binom{11}{4}$$

$n(A)=?$ $x_1+x_2+\dots+x_5=5$ ، $x_i \geq 0$ صحیح

$$n(A)=\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4} \qquad P(A)=\frac{\binom{9}{4}}{\binom{11}{4}}$$

مثال : در ظرفی 6 مهره مشکی و 5 مهره سفید قرار دارد. از داخل ظرف دو مهره به تصادف در می‌آوریم احتمال آنکه دو مهره همرنگ باشند چقدر است؟

$$n(S)=\binom{9}{2}=36$$

$$n(A)=\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=6+10=16 \qquad P(A)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

تعبیر احتمال (به مفهوم فراوانی نسبی) :

یک آزمایش تصادفی را n بار تکرار می کنیم، فرض کنید که خروجی هر آزمایش ارتباط و تاثیری بر خروجی آزمایش های دیگر نداشته باشد، یعنی آزمایش ها به طور مستقل از هم انجام شده باشند. در اینصورت احتمال رخ دادن پیشامد A را به صورت حد زیر تعریف می کنیم:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$$

که در آن $n(A)$ تعداد دفعاتی است که پیشامد A رخ داده است.