فصل اول

تعریف: منظور از یک معادله دیفرانسیل، معادله ای بین یک تابع، متغیر یا متغیرهای مستقل و مشتقات نسبت به متغیر یا متغیرها می باشد. اگر فقط یک متغیر مستقل وجود داشته باشد، معادله را معادله دیفرانسیل معمولی و در غیر اینصورت جزئی می گوییم.

بالاترین مرتبه مشتق در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می گوییم.

هر معادله دیفرانسیل مرتبه n را بصورت $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ می توان در نظر گرفت. معادله دیفرانسیل به فرم

$$a_n(x) y^{(n)} + \cdots + a_1(x) y = f(x)$$

را معادله دیفرانسیل خطی و در غیر اینصورت معادله غیرخطی گوییم. اگر طرف راست معادله صفر باشد یعنی $f(x) = 0$ باشد معادله را همگن می گوییم.

مثال:

$$y'' + 4yy' + 2y - \cos(x) = 0$$

معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

$$y^{(3)} + 3x^2 y' + 2y = \sin(x)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه سوم ناهمگن

تعریف: تابع $y = \phi(x)$ را جواب معادله دیفرانسیل گوییم اگر در آن صدق کند که معمولاً دارای n پارامتر مستقل یا ثابت است که جواب عمومی نامیده می شود.

تعریف: هرگاه جواب معادله دیفرانسیل توسط رابطه‌ای با ثابت‌های دلخواه بیان شود (که در واقع ثابت‌ها از ثابت‌های انتگرال‌گیری بدست می‌آیند) جواب را عمومی و جوابی که با محاسبه پارامترهای آزاد تحت شرایط داده شده بدست می‌آیند را جواب خصوصی معادله گوییم. جوابی که تحت هیچ شرایطی از جواب عمومی بدست نیاید و منحنی آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد، جواب غیرعادی معادله (تکاملی، منفرد یا تکین) خوانده می‌شود.

مثال: معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=16$ با شرط اولیه $y(0)=4$ را در نظر بگیرید:

$$y^2(1+y'^2)=16 \Rightarrow 1+y'^2=\frac{16}{y^2} \Rightarrow y'^2=\frac{16}{y^2}-1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{16}{y^2}-1}}=dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{\frac{16-y^2}{y^2}}}=x+c \Rightarrow \int\frac{y\,dy}{\sqrt{16-y^2}}=x+c$$

$$\int\frac{y}{\sqrt{16-y^2}}dy =$$

$$u=\sqrt{16-y^2}=(16-y^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow du=\frac{1}{2}(-2y)(16-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$du=\frac{-y}{\sqrt{16-y^2}}dy$$

$$=\int -du=u=-\sqrt{16-y^2}$$

$$-\sqrt{16-y^2}=x+c \Rightarrow (x+c)^2+y^2=16$$

به جواب بالا جواب عمومی معادله فوق می‌گوییم. حال اگر شرط $y(0)=4$ را قرار دهیم مقدار $c=0$، و جواب $x^2+y^2=16$ یک جواب خصوصی معادله فوق است.

جواب $y=\pm 4$ جواب غیرعادی معادله است که با قرار دادن $\sqrt{\frac{16}{y^2}-1}=0$ بدست می‌آوریم.

که همهٔ جواب‌های عمومی بر این دو جواب مماس هستند.

نکته: معادلات خطی جواب غیرعادی ندارند.

نکته: برای بدست آوردن ثابت های ظاهر شده در جواب عمومی و بدست آوردن جواب خصوصی یک معادله مرتبه n، معمولاً n شرط اولیه در یک نقطه داده می شوند:

$$y(x_0)=y_0 \quad , \quad y'(x_0)=y_1 \,,\, \dots \,,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

نکته: اگر شرایط در دو نقطه گفته شود، شرایط را مرزی می گوییم:

$$y''+\sin(x)\,y=0 \qquad y(0)=0 \quad , \quad y(\pi)=1$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y=xy'+y'+\sqrt{y'}$ جواب عمومی معادله بصورت $y=cx+c+\sqrt{c}$ می باشد. معادله دارای جواب دیگر $y=-\dfrac{1}{4(x+1)}$ هست که جواب غیرعادی معادله می باشد.

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

معادلات دیفرانسیل جداشدنی: هرگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان بصورت $f(x)dx+g(y)dy=0$ درآورد به آن معادله دیفرانسیل جداشدنی یا تفکیک پذیر می گوییم.

جواب عمومی این معادله بصورت $\int f(x)dx+\int g(y)dy=c$ می باشد.

مثال 1: معادله $x^2(y+1)\,dx+y^2(x-1)\,dy=0$

$$\frac{x^2}{(x-1)}\,dx+\frac{y^2}{y+1}\,dy=0$$

$$\int\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int\frac{y^2}{y+1}\,dy=0$$

$$\int\left((x+1)+\frac{1}{x-1}\right)dx+\int\left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy=0$$

$$\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+\frac{y^2}{2}-y+\ln|y+1|+C_1+C_2=0$$

$$x^2+2x+y^2-2y+2\ln|x-1||y+1|=C$$

مثال 2: معادله $y'=2+y$

$$\frac{dy}{y}=2t\,dt \Rightarrow \ln|y|=t^2+C$$

$$\Rightarrow |y|=e^C e^{t^2}=\underbrace{k}_{e^C>0}e^{t^2} \Rightarrow y=\pm k e^{t^2} \Rightarrow y=\underbrace{k}_{\text{ثابت دلخواه}}e^{t^2}$$

مثال 3: $y'=-2(1+y)^2$

$$\frac{dy}{dt}=-2(1+y)^2 \Rightarrow \frac{dy}{(1+y)^2}=-2\,dt$$

$$-\frac{1}{1+y}=-2t+C \Rightarrow y+1=\frac{-1}{-2t+C}=\frac{1}{2t+C}$$

$$y=\frac{1}{2t+C}-1$$

نکته: معادلات جداشدنی معمولاً دارای جوابهای غیرعادی هستند که با حل معادله $\frac{1}{g(y)}=0$ بدست می‌آید.

مثال: جوابهای غیرعادی مثال های 1 تا 3 را بدست آورید:

① $g(y)=\frac{y^2}{y+1} \Rightarrow \frac{1}{g(y)}=\frac{y+1}{y^2}=0 \Rightarrow y=-1$

② $y=0 \Rightarrow$ که در معادله عمومی هم ظاهر می‌شود پس غیرعادی در نظر گرفته نمی‌شود $\qquad \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)}=0 \Rightarrow y=0$

③ $(1+y)^2=0 \Rightarrow y=-1$ جواب های غیرعادی

مثال: مسئله مقدار اولیه $\dfrac{dy}{y^2+1}=\dfrac{dt}{t^2}$ را با شرط $y(1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ حل نمایید.

$$\int \frac{dy}{y^2+1}=\int \frac{dt}{t^2} \Rightarrow \tan^{-1} y=-\frac{1}{t}+c$$

$$\Rightarrow y(t)=\tan\left(-\frac{1}{t}+c\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}=y(1)=\tan(-1+c)$$

$$c-1=\frac{\pi}{6} \Rightarrow c=1+\frac{\pi}{6} \qquad y(t)=\tan\left(-\frac{1}{t}+1+\frac{\pi}{6}\right)$$

معادلات قابل تبدیل به جداشدنی:

معادلات به فرم $y'=f(ax+by+c)$: برای حل این معادلات از تغییر متغیر $u=ax+by+c$ استفاده می کنیم و آن را به معادله جداشدنی تبدیل می نماییم.

$$u'=a+by' \Rightarrow \frac{u'-a}{b}=f(u) \Rightarrow$$

$$u'=a+b\,f(u) \Rightarrow \frac{du}{bf(u)+a}=dx$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'=\tan^2(x+y)$ را حل نمایید.

$$u=x+y \Rightarrow u'=1+y' \Rightarrow y'=u'-1 \Rightarrow u'-1=\tan^2(u)$$

$$u'=\tan^2(u)+1 \Rightarrow \frac{du}{\tan^2(u)+1}=dx \Rightarrow \cos^2(u)\,du=dx$$

$$\frac{1+\cos(2u)}{2}du=dx \Rightarrow x-\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{4}\sin(2u)=c$$

$$x-\tfrac{1}{2}(x+y)-\tfrac{1}{4}\sin(2(x+y))=0$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

مثال: معادله $y' = -\sin^2(x+y+3)$ را حل نمایید.

$$u = x+y+3 \Rightarrow u' = 1+y' \Rightarrow y' = u'-1$$

$$u'-1 = -\sin^2(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin^2(u)+1 \Rightarrow \frac{du}{-\sin^2(u)+1} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\cos^2(u)} = dx \Rightarrow \tan(u) = x+c$$

$$\tan(x+y+3) = x+c \qquad u = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$ جوابهای منفرد

$$x+y+3 = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

معادلات همگن: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم هرگاه

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال: تابع $f(x,y) = 3x^4 + x^2y^2 + y^4$ همگن از درجه 4 است.

مثال: تابع $f(x,y) = \dfrac{xy^2 + x^3 \sin(y/x)}{y^3}$ همگن از درجه صفر است.

نکته: اگر معادله به فرم $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ باشد و M و N هردو همگن از درجه n باشند، معادله همگن از درجه صفر است.

تعریف: یک معادله دیفرانسیل را همگن گوییم، هرگاه معادله $y' = f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد

برای حل معادلات همگن از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ استفاده می کنیم تا به معادله جداشدنی برسیم

مثال : معادله $y' = -\frac{11xy}{x^2-3y^2}$ را حل کنید.

معادله همگن از مرتبه صفر است. پس تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ را استفاده می کنیم

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{-11x\,(ux)}{x^2 - 3(ux)^2} \Rightarrow xu' = \frac{-11u}{1-3u^2} - u$$

$$\Rightarrow xu' = \frac{-11u - u + 3u^3}{1-3u^2} \Rightarrow xu' = \frac{-12u + 3u^3}{1-3u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-3u^2)\,du}{-12u + 3u^3} = \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1-3u^2}{-12u+3u^3} = \frac{1-3u^2}{3u(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$$

$$A = \frac{1}{12} \qquad B = \frac{-11}{24} \qquad C = -\frac{11}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}\ln u - \frac{11}{24}\ln(u-2) - \frac{11}{24}\ln(u+2) = \ln(x) + c$$

$$24\ln(x) + c = \ln\left(\frac{u^2}{(u^2-4)^{11}}\right) \Rightarrow \frac{u^2}{(u^2-4)^{11}} = kx^{24}$$

مثال : جواب معادله دیفرانسیل

$$(y^2 - 2xy)dx + (2xy - x^2)dy = 0$$

را بدست آورید.

همگن از مرتبه صفر پس $\quad u = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow y' = \frac{-y^2 - 2xy}{2xy - x^2}$$

$$u'x + u = -\frac{u^2x^2 - 2x^2u}{2x^2u - x^2} = -\frac{u^2 - 2u}{2u - 1}$$

$$\Rightarrow u'x = -\frac{u^2 - 2u + 2u^2 - u}{2u - 1} \Rightarrow u'x = \frac{3u - 3u^2}{2u - 1}$$

$$\frac{2u - 1}{3u - 3u^2}\, du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} Ln(u^2 - u) = -Ln(x) + c$$

$$\Rightarrow Ln(u^2 - u) = -3\, Ln(x) + c \Rightarrow u^2 - u = kx^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = kx^{-3} \Rightarrow xy^2 - x^2y = k$$

مثال: معادله دیفرانسیل $\quad 2xy\, dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad u = \frac{y}{x} \Rightarrow ux = y \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = -\frac{2ux^2}{x^2(1 + u^2)} = -2\frac{u}{1 + u^2} \Rightarrow u'x = \frac{-2u - u - u^3}{(1 + u^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + u^2}{3u + u^3} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow -Ln(x) + c = \int \frac{1 + u^2}{u(3 + u^2)}\, du$$

$$\int \frac{A}{u}\, du + \int \frac{Bu + C}{3 + u^2} \qquad A = \frac{1}{3},\ B = \frac{2}{3},\ C = 0$$

معادلات به فرم : $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

اگر $c = c' = 0$ که معادله همگن از مرتبه صفر است، در غیر اینصورت شامل یکی از دو حالت زیر پیش می آید:

الف) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ باشد که دو خط موازی هستند، کافیست از تغییر متغیر $u = ax + by$ استفاده کنیم.

ب) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ که دو خط متقاطع هستند، با حل دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

نقطه تقاطع (α, β) را پیدا کرده و با تغییر متغیر $Y = y - \beta$ و $X = x - \alpha$ معادله را به یک معادله همگن تبدیل می کنیم.

مثال: معادله $y' = \dfrac{x+3y-5}{x-y-1}$ را حل کنید.

$$\begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \qquad y=1 \ , \ x=2 \qquad \alpha=1 \quad \beta=2$$

$$Y = y-1 \ , \ X = x-2$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y}{X-Y} \qquad Y = uX \qquad u = \frac{Y}{X}$$

$$Xu' + u = \frac{1+3u}{1-u} \Rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{1+3u}{1-u} - u = \frac{(u+1)^2}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{(u+1)^2}du = \frac{dX}{X} \Rightarrow \frac{-(u+1)+2}{(u+1)^2}du = \frac{dX}{X}$$

$$\int -\frac{1}{u+1} + \frac{2}{(u+1)^2} = \int\frac{dX}{X} \Rightarrow -\ln(u+1) + \frac{2}{u+1} = \ln X + c$$

جواب غیرعادی $u = -1$

مثال: معادله $y' = \dfrac{x-3y+3}{2x-6y+1}$ را بدست آورید:

دو خط موازی $\quad u = x-3y \qquad u' = 1-3y' \Rightarrow y' = \dfrac{1-u'}{3}$

$$\frac{1-u'}{3} = \frac{u+3}{2u+1} \Rightarrow 1-u' = \frac{3u+9}{2u+1} \Rightarrow u' = -\frac{u+8}{2u+1}$$

$u=-8$ جواب غیرعادی $\quad x-3y=-8$ ،

$$-\frac{2u+1}{u+8}\,du = dx \Rightarrow -\frac{2(u+8)-15}{u+8}\,du = dx$$

$$-2u + 15\ln(u+8) = x+c$$

مثال: جواب معادله $(x+y+1)^2 dx + (2x+2y+1)\,dy = 0$ را بدست آورید.

$$(u+1)^2 dx + (2u+1)(du-dx) = 0$$

$$((u+1)^2 - 2u - 1)\,dx + (2u+1)\,du = 0$$

$$dx + \frac{2u+1}{u^2}\,du = 0 \Rightarrow x + \int \frac{2}{u} + \int \frac{1}{u^2}\,du = x + 2\ln(u) - \frac{1}{u} = c$$

$$x + 2\ln|x+y| + \frac{1}{x+y} = c$$

حل معادلات به فرم $y f(xy)\,dx + x g(xy)\,dy = 0$

با قرار دادن $u=xy$ به معادله دیفرانسیل جدایی پذیر تبدیل می‌شوند.

مثال: معادله $(x^2y^3 + y)\,dx + (x - x^3y^2)\,dy = 0$ را حل کنید.

$y(x^2y^2+1)\,dx + x(1-x^2y^2)\,dy = 0$

$x\,dy = du + \frac{u}{x}\,dx \Leftarrow du = x\,dy + y\,dx \Leftarrow u = xy$

$\frac{u}{x}(u^2+1)\,dx + (1-u^2)\left(du - \frac{u}{x}\,dx\right) = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-u^2}{2u^3}\,du = 0$$

مثال: معادله دیفرانسیل $(2x^3+3y^2x-7x)\,dx + (8y-3x^2y-2y^3)\,dy = 0$ را حل نمایید.

$x(2x^2+3y^2-7)\,dx + y(8-3x^2-2y^2)\,dy = 0$

$v = y^2 \quad , \quad u = x^2$

$(2u+3v-7)\,du + (8-3u-2v)\,dv = 0$

$\begin{cases} 2u+3v=7 \\ -3u-2v=-8 \end{cases} \quad u=2 \quad v=1 \qquad U = u-2 \quad , \quad V = v-1$

$u = U+2 \qquad v = V+1$

$(2U+3V)\,dU - (3U+2V)\,dV = 0$

$r = \frac{U}{V}$

$dU = r\,dV + V\,dr$

$2(r^2-1)\,dV + (2r+3)V\,dr = 0$

$$2\frac{dV}{V} = -\frac{(2r+3)}{(r^2-1)}\,dr$$

$y=t^\alpha$: برخی معادلات با تغییر متغیر $y=t^\alpha$ به معادله همگن تبدیل می شود

$$y=t^\alpha \qquad dy=\alpha t^{\alpha-1}$$

مثال : معادله دیفرانسیل $4xy^2dx+(x^2y-1)dy=0$ را حل کنید .

$$y=t^\alpha \qquad dy=\alpha t^{\alpha-1}\,dt$$

$$\underbrace{4xt^{2\alpha}dx}_{\text{همگن از مرتبه } 1+2\alpha}+(x^2t^\alpha-1)\,\alpha t^{\alpha-1}\,dt=0$$

$$[x^2t^{2\alpha-1}-\alpha t^{\alpha-1}]$$

$1+2\alpha=-3$

$2\alpha=-4 \Rightarrow \alpha=-2$

$$\alpha-1=2+2\alpha-1 \Rightarrow \alpha-1=2\alpha+1 \Rightarrow \alpha=-2$$

همگن از درجه -3

$$y=t^{-2}$$

$$4xt^{-4}dx-2(x^2t^{-5}-t^{-3})dt=0$$

$$4xt\,dx-2(x^2-t^2)dt=0$$

$$u=\frac{t}{x} \Rightarrow t=ux \Rightarrow dt=u\,dx+x\,du$$

$$\Rightarrow 4u\,dx-2(1-u^2)u\,dx-2(1-u^2)x\,du=0$$

$$(-2u+2u^3+4u)dx+2(u^2-1)x\,du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{2(u^2-1)}{2(u^2+u)}du=0 \Rightarrow \ln(x)+C+\int(u-1)\,du=0$$

$$\ln(x)+C+\frac{u^2}{2}-u=0$$

مثال : معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{2+3xy^2}{4x^2y}$ را حل کنید .

$y = t^{\alpha} \Rightarrow dy = \alpha t^{\alpha-1} dt$

$4x^2 y\, dy = (2+3xy^2)\, dx$

$\underbrace{4x^2 t^{\alpha} \alpha t^{\alpha-1}}_{\substack{2\alpha+2-1=0 \\ \alpha=-\frac{1}{2}}} dt = (\underbrace{2+3x\, t^{2\alpha}}_{\substack{2\alpha+1=0 \\ \alpha=-\frac{1}{2}}})\, dx$ $\qquad y = t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$4(-\frac{1}{2}) x^2 t^{-2} dt = (2+3xt^{-1})\, dx$ $\qquad \left[\begin{array}{l} u = \frac{t}{x} \Rightarrow t = ux \\ dt = u\,dx + x\,du \end{array}\right]$

$-2x^2 (ux)^{-2} (u\,dx + x\,du) = (2+3x(ux)^{-1})\, dx$

$-\frac{2}{u^2} (u\,dx + x\,du) = (2+\frac{3}{u})\, dx$

$-\frac{2}{u} dx - \frac{2}{u^2} x\,du = (2+\frac{3}{u})\,dx \Rightarrow (2+\frac{5}{u})\,dx = -\frac{2}{u^2} x\,du$

$(2u^2+5u)\,dx = -2x\,du \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2u^2+5u} du$

$-\frac{1}{2} Ln(x) + c = \int \frac{1}{2} \frac{1}{u(u+\frac{5}{2})} du$

$-\frac{1}{2} Ln(x) = \frac{1}{2} \int (\frac{A}{u} + \frac{B}{u+\frac{5}{2}})\, du$ $\qquad A = -\frac{2}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$

$-\frac{1}{2} Ln(x) + c = -\frac{1}{5} Ln(u) + \frac{1}{5} Ln(u+\frac{5}{2})$ $\qquad u = \frac{t}{x} = \frac{1/y^2}{x} = \frac{1}{xy^2}$

$y = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \sqrt{t} = \frac{1}{y} \Rightarrow t = \frac{1}{y^2}$

$-\frac{1}{2} Ln(x) + C = -\frac{1}{5} Ln(\frac{1}{xy^2}) + \frac{1}{5} Ln(\frac{1}{xy^2} + \frac{5}{2})$