مثال : 12 بلیط را بین 5 نفر طوری تقسیم می کنیم که به هر نفر حداقل یک بلیط برسد. احتمال اینکه به نفر دوم و سوم حداقل دو بلیط برسد چقدر است ؟

$$x_1+x_2+\dots+x_5=12 \qquad x_i \geq 1 \text{ ، صحیح}$$

$$x_1+x_2+\dots+x_5=7 \qquad x_i \geq 0 \text{ ، صحیح}$$

$$n(S)=\binom{7+5-1}{5-1}=\binom{11}{4}$$

$$n(A)=? \qquad x_1+x_2+\dots+x_5=5 \qquad x_i \geq 0 \text{ ، صحیح}$$

$$n(A)=\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4} \qquad P(A)=\frac{\binom{9}{4}}{\binom{11}{4}}$$

مثال : در ظرفی 6 مهره مشکی و 5 مهره سفید قرار دارد. از داخل ظرف دو مهره به تصادف در می آوریم احتمال اینکه دو مهره همرنگ باشند چقدر است ؟

$$n(S)=\binom{9}{2}=36$$

$$n(A)=\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=6+10=16$$

$$P(A)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

تعبیر احتمال (به مفهوم فراوانی نسبی) :

یک آزمایش تصادفی را n بار تکرار می کنیم ، فرض کنید که خروجی هر آزمایش ارتباط و تاثیری بر خروجی آزمایش های دیگر نداشته باشد، یعنی آزمایش ها به طور مستقل از هم انجام شده باشند. دراینصورت احتمال رخ دادن پیشامد A را به صورت حد زیر تعریف می کنیم :

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$$

که درانجا $n(A)$ تعداد دفعاتی است که پیشامد A رخ داده است .

مثال: جدول فراوانی زیر مربوط به گروه خونی 1000 نفر است که به طور تصادفی از جامعه‌ای انتخاب شده‌اند. با توجه به جدول فراوانی زیر

الف) احتمال اینکه کسی گروه خونی O داشته باشد؟

ب) احتمال اینکه کسی گروه خونی A یا B داشته باشد چقدر است؟

گروه خونی	f_i	r_i
O	420	0.42
A	200	0.2
B	150	0.15
AB	230	0.23

الف) $P(O) = 0.42$

ب) $P(A \cup B) = 0.2 + 0.15 = 0.35$

احتمال در فضای غیرهمشانس:

مثال: تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد 2 برابر هر عدد زوج است. اگر G پیشامد ظاهر شدن عددی بزرگتر از 3 باشد، $P(G)$ را محاسبه کنید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(2) = P(4) = P(6) = \omega$$

$$P(1) = P(3) = P(5) = 2\omega$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$9\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{9}$$

$$P(G) = P(\{4, 5, 6\}) = 4\omega = \frac{4}{9}$$

مثال: تاسی چنان طراحی شده است که احتمال وقوع هر عدد با آن عدد متناسب است. احتمال اینکه عدد فردی در پرتاب تاس ظاهر شود چقدر است؟

$$P(1) = \omega, \quad P(2) = 2\omega, \dots, \quad P(6) = 6\omega \qquad \sum_{i=1}^{6} P(i) = 1 \Rightarrow \omega + 2\omega + \dots + 6\omega = 1$$

$$21\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{21} \Rightarrow P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21}$$

احتمال شرطی:

اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشند و $P(A)\neq 0$، آنگاه احتمال شرطی B به شرط A بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

که تعبیر آن احتمال رخ دادن پیشامد B مشروط بر این است که پیشامد A رخ دهد.

مثال: فردی با احتمال 80 درصد حدس می‌زند که کلید گمشده‌اش در یکی از دو جیب پیراهنش باشد (احتمال بودن کلید در هر جیب برابر با 40 درصد است). اگر پس از گشتن جیب چپ کلید پیدا نشد. احتمال بودن کلید در جیب راست چقدر است؟

حل:

$$P(R|L') = \frac{P(L'\cap R)}{P(L')} = \frac{P(R)}{1-P(L)} = \frac{0.4}{1-0.4} = \frac{2}{3}$$

R: پیشامد اینکه کلید در جیب راست باشد.

L: پیشامد اینکه کلید در جیب چپ باشد.

L': پیشامد اینکه کلید در جیب چپ نباشد.

مثال: سکه‌ای را 2 بار پرتاب می‌کنیم. احتمال شرطی اینکه 2 شیر ظاهر شود مشروط بر اینکه:

الف) در پرتاب اول شیر ظاهر شود.

ب) در یکی از دو پرتاب حداقل یک شیر ظاهر شود

چقدر است.

حل: الف) A: پیشامد اینکه دو شیر ظاهر شود.

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

$A = \{HH\}$

B: پیشامد اینکه در پرتاب اول شیر ظاهر شود

$B = \{HT, HH\}$

$(A\cap B) = \{HH\}$

$P(A\cap B) = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ب) C : پیشامد اینکه در یکی از دو پرتاب حداقل یک شیر ظاهر شود.

$C = \{HT, TH, HH\}$

$P(A \cap C) = P(HH) = \frac{1}{4}$

$P(C) = \frac{3}{4}$

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

تذکر : در فضای همشانس $P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

فرمول ضرب احتمال : با توجه به تعریف احتمال شرطی ، اگر $P(B) \neq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(B)\,P(A|B), \qquad P(B) \neq 0$$

به طور مشابه با توجه به تعریف $P(B|A)$ داریم

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A) \qquad P(A) \neq 0$$

فرمول فوق را فرمول ضرب احتمال می گویند .

مثال : دانشجویی بین گرفتن درس شیمی و ریاضی مردد است . او گمان می کند که با احتمال $\frac{2}{3}$ در درس شیمی نمره A و با احتمال $\frac{1}{2}$ در درس ریاضی نمره A می گیرد . اگر این دانشجو براساس انداختن یک سکه سالم تصمیم گیرد که کدام درس را اخذ کند ، احتمال اینکه در این ترم در درس شیمی نمره A بگیرد چقدر است ؟

حل : A : پیشامد اینکه در درس انتخابی نمره A بگیرد

C : پیشامد اینکه درس شیمی را انتخاب کند

$$P(A\cap C) = P(A)\,P(C|A)$$
$$= P(C)\,P(A|C)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال : جعبه ای شامل 3 مهره سفید، 4 مهره سیاه و 2 مهره قرمز است. از این جعبه یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم. اگر این مهره سفید نباشد احتمال اینکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

حل : B : پیشامد اینکه مهره سیاه باشد

w : پیشامد اینکه مهره سفید باشد.

$$P(B|w') = \frac{P(B\cap w')}{P(w')} = \frac{P(B)}{P(w')}$$

$$= \frac{4/9}{6/9} = \frac{2}{3}$$

$$P(B|w') = \frac{n(B\cap w')}{n(w')} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال : در مثال قبل اگر دو مهره از جعبه به تصادف و به ترتیب بدون جایگذاری خارج کنیم، مطلوبست

الف) احتمال اینکه مهره انتخابی اول سفید و دومی سیاه باشد.

ب) احتمال اینکه مهره انتخابی اول سیاه و دومی قرمز باشد.

حل :

w_i : پیشامد اینکه مهره i ام سفید باشد.

B_i : پیشامد اینکه مهره i ام سیاه باشد.

R_i : پیشامد اینکه مهره i ام قرمز باشد.

$$P(w_1\cap B_2) = P(w_1)\,P(B_2|w_1) = \frac{3}{9}\times\frac{4}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

$$P(B_1\cap R_2) = P(B_1)\,P(R_2|B_1) = \frac{4}{9}\times\frac{2}{8} = \frac{1}{9}$$

مثال : در جعبه ای 8 توپ قرمز و 4 توپ سفید قرار دارد. دو توپ را به صورت متوالی و بدون جایگذاری خارج می کنیم.

الف) اگر فضا همشانس باشد احتمال اینکه هر دو توپ خارج شده قرمز باشد.

ب) اگر وزن هر توپ قرمز r و وزن هر توپ سفید w باشد و شانس انتخاب شدن هر توپ با وزن آن متناسب باشد، احتمال اینکه هر دو توپ قرمز باشند چقدر است؟

الف) R_i : پیشامد اینکه توپ iام قرمز باشد

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\,P(R_2 | R_1)$$

$$= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

ب) $P(R_1) = \dfrac{8r}{8r+4w}$, $P(R_2 | R_1) = \dfrac{7r}{7r+4w}$

$$\Rightarrow P(R_1 \cap R_2) = \frac{8r}{8r+4w} \times \frac{7r}{7r+4w}$$

مثال : جدول زیر تعداد کارگران ماهر، نیمه ماهر و غیرماهر دو کارخانه A و B را نشان می دهد اگر کارگری به تصادف انتخاب کنیم و ماهر باشد. احتمال اینکه از کارخانه A باشد چقدر است؟

	کارخانه A	کارخانه B	جمع
ماهر	15	25	40
نیمه ماهر	35	15	50
غیرماهر	50	10	60
جمع	100	50	150

A : پیشامد اینکه کارگر کارخانه A باشد.

B : پیشامد اینکه کارگر کارخانه B باشد

C : پیشامد اینکه کارگر ماهر باشد.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0.15}{\frac{4}{15}}$$

نکته : فرمول ضرب احتمال را می توان بصورت زیر تعمیم داد :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A \cap B)$$

$$\vdots$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1)\,P(E_2|E_1)\,P(E_3|E_1 \cap E_2) \dots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \dots E_{n-1})$$

مثال: اگر از محموله 240 عدد لامپ که 15 عدد آن معیوب است به تصادف و به توالی 2 لامپ برمی داریم چقدر احتمال دارد که هر دو آنها معیوب باشند.

F_1: پیشامد اینکه لامپ اول معیوب باشد.

F_2: پیشامد اینکه لامپ دوم معیوب باشد.

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2|F_1) = \frac{15}{240} \times \frac{14}{239}$$

اگر سه لامپ به توالی و تصادف خارج کنیم، احتمال اینکه هر سه خراب باشند چقدر است؟

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1)P(F_2|F_1)P(F_3|F_1 \cap F_2)$$

$$= \frac{15}{240} \times \frac{14}{239} \times \frac{13}{238}$$

احتمال اینکه اولی خراب و دومی سالم و سومی خراب باشد چقدر است؟

$$P(F_1 \cap F_2' \cap F_3) = \frac{15}{240} \times \frac{225}{239} \times \frac{14}{238}$$

تعریف (پیشامد مستقل):

دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه وقوع یکی تأثیری در رخ دادن دیگری نداشته باشد، به بیان ریاضی

$$P(B|A) = P(B) \qquad P(A|B) = P(A)$$

اما

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

فرمول فوق را فرمول ضرب احتمال برای پیشامدهای مستقل گوییم، گاهی تعریف پیشامدهای مستقل صرفاً براساس این فرمول بیان می شود.

تعریف: دو پیشامد A و B را مستقل گویند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

تعریف استقلال سه پیشامد:

سه پیشامد A و B و C را مستقل گوییم هرگاه اولاً دو به دو مستقل بوده و ثانیاً

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\,P(B)\,P(C)$$

مثال: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا شیر بیاید. احتمال اینکه برای اولین بار در پرتاب nام شیر بیاید را محاسبه کنید.

حل:

$$P(\underbrace{TTT\cdots T}_{n-1}H)=\underbrace{P(T)P(T)\cdots P(T)}_{\text{بار } n-1}P(H)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}$$

مثال: تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا عدد 6 ظاهر شود. احتمال اینکه برای اولین بار در پرتاب nام عدد 6 ظاهر شود، چقدر است؟

S: احتمال اینکه ۶ ظاهر شود

$$P(\underbrace{S'S'\cdots S'}_{\text{بار } n-1}S)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5^{n-1}}{6^n}$$

توجه: توجه کنید که ناسازگاری دو پیشامد به معنی اشتراک نداشتن آن دو است. در صورتی که مستقل بودن چنین معنایی ندارد. در واقع اگر دو پیشامد ناسازگار بخواهند مستقل باشند باید داشته باشیم

$$0=P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

لذا یا $P(A)=0$ یا $P(B)=0$.