مثال: یک خانواده دارای دو ماشین هستند. اگر احتمال اینکه ماشین اول در معاینه فنی قبول شود 0.9 و احتمال اینکه ماشین دوم در معاینه فنی قبول شود 0.7 باشد، احتمال اینکه حداقل یکی از دو خودرو این خانواده در معاینه فنی قبول شود چقدر است؟

A_1: خودرو اول در معاینه فنی قبول شود

A_2: خودرو دوم در معاینه فنی قبول شود.

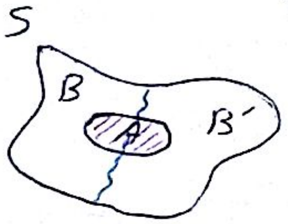
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$$

$$= 0.9 + 0.7 - 0.9 \times 0.7 = 1.6 - 0.63 = 0.97$$

فرمول احتمال کل:

اگر در یک آزمایش تصادفی به حالت های مختلفی برخورد کنیم و یا نتیجه آزمایش به نتیجه یک مرحله میانی بستگی داشته باشد، از قاعده تفکیک احتمال استفاده می کنیم



فرض کنید $P(B) \neq 0$، در اینصورت

$$P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (B \cup B')) = P((A \cap B) \cup (A \cap B'))$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$= P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

بطور خلاصه

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

مثال: در یک جامعه آماری 0.3 افراد در گروه مستعد ابتلا به بیماری آنفلوآنزا قرار دارند (مانند سالمندان، پرسنل پزشکی ...) اگر یک فرد در گروه مستعد ابتلا به بیماری، با احتمال 0.4 و بقیه افراد با احتمال 0.2 در طول یکسال به این بیماری مبتلا شوند، احتمال اینکه یک فرد در این جامعه در طول یک سال به آنفلوآنزا مبتلا شود، چقدر است؟

Pr : پیشامد اینکه فردی مستعد بیماری آنفلوآنزا باشد.

Pr' : پیشامد اینکه فردی مستعد بیماری آنفلوآنزا نباشد.

A : پیشامد اینکه فردی به آنفلوآنزا مبتلا شود.

$P(Pr)=0.3 \qquad P(Pr')=1-P(Pr)=1-0.3=0.7$

$P(A|Pr)=0.4 \qquad P(A)=P(A\cap Pr)+P(A\cap Pr')$

$P(A|Pr')=0.2$

$$=P(Pr)P(A|Pr)+P(Pr')P(A|Pr')$$

$$=0.3\times 0.4+0.2\times 0.7=0.26$$

مثال : در جعبه‌ای 8 توپ قرمز و 4 توپ سفید قرار دارد. از داخل جعبه دو توپ متوالی و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه توپ دوم قرمز باشد چقدر است؟

$$P(R_2)=P(R_1)P(R_2|R_1)+P(R_1')P(R_2|R_1')$$

R_1 : احتمال اینکه توپ اول قرمز باشد.

R_2 : احتمال اینکه توپ دوم قرمز باشد

$$=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}+\frac{4}{12}+\frac{8}{11}=\frac{8}{12}$$

مثال : در ظرف A، 4 مهره قرمز و 7 مهره آبی و در ظرف B، 3 مهره قرمز و 2 مهره آبی قرار دارد. به تصادف مهره‌ای از ظرف A خارج کرده و به همراه مهره‌ای هم‌رنگ آن وارد ظرف B می‌کنیم. سپس مهره‌ای به تصادف از ظرف B خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره قرمز باشد چقدر است؟

$$P(R_2)=P(R_1)P(R_2|R_1)+P(R_1')P(R_2)R_1')$$

$$=\frac{4}{11}\times\frac{5}{7}+\frac{7}{11}\times\frac{3}{7}$$

مثال : در مثال دانشجوی مرد، احتمال اینکه این دانشجو نمره A بگیرد چقدر است؟

$$P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap C')=P(C)P(A|C)+P(C')P(A|C')$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

تعمیم فرمول احتمال کل: اگر B_1، B_2، ... B_k یک افراز از فضای نمونه باشد. در اینصورت

$$P(A)=P(A\cap S)=P(A\cap(B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_k))$$

$$=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\dots+P(A\cap B_k)$$

$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\dots+P(B_k)P(A|B_k)$$

بطور خلاصه:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)$$

مثال: سه ظرف را در نظر بگیرید در اولی 4 مهره مشکی و 3 مهره سفید و در دومی 5 مهره مشکی و 2 مهره سفید و در سومی 6 مهره سفید و 4 مهره مشکی قرار دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره خارج شده مشکی باشد چقدر است.

B: پیشامد مشکی بودن مهره

C_i: پیشامد اینکه ظرف i ام انتخاب شود.

$$P(B)=P(C_1)P(B|C_1)+P(C_2)P(B|C_2)+P(C_3)P(B|C_3)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}$$

فرمول بیز: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند بطوریکه $P(A)\neq 0$، در اینصورت:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$

در حالت کلی اگر B_1، B_2، ... B_k یک افراز از S باشند، فرمول بیز بصورت زیر خواهد بود

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)}$$

مثال: در مثال دانشجوی مردود، اگر دانشجو در درس انتخابی A گرفته باشد، احتمال اینکه شیمی را انتخاب کرده باشد چقدر است؟

حل:

$$P(C|A) = \frac{P(C)\,P(A|C)}{P(C)\,P(A|C) + P(C')\,P(A|C')}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

مثال: در مثال شیوع بیماری آنفلوآنزا، اگر فردی مبتلا به بیماری باشد، احتمال اینکه متعلق به گروه مستعد باشد چقدر است؟

حل:

$$P(Pr|A) = \frac{P(Pr \cap A)}{P(A)} = \frac{P(Pr)\,P(A|Pr)}{P(Pr)\,P(A|Pr) + P(Pr')\,P(A|Pr')}$$

$$= \frac{0.3 \times 0.4}{0.3 \times 0.4 + 0.2 \times 0.7}$$

مثال: یک شرکت محصولات خود را در سه کارخانه تولید می‌کند. در کارخانه اول 20 درصد، در کارخانه دوم 50 درصد و در کارخانه سوم 30 درصد از محصولات این شرکت تولید می‌شود. اگر به ترتیب 0.01، 0.02، 0.05 درصد از محصولات کارخانه اول، دوم، سوم معیوب باشد

الف) احتمال اینکه یک محصول معیوب باشد چقدر است؟

ب) اگر محصول خاصی از این شرکت معیوب باشد، چقدر احتمال دارد در کارخانه دوم تولید شده باشد.

F : پیشامد خراب بودن

M_i : محصول کارخانه i ام بودن

$$P(F) = P(M_1)P(F|M_1) + P(M_2)P(F|M_2) + P(M_3)P(F|M_3)$$

$$= 0.2 \times 0.01 + 0.5 \times 0.02 + 0.3 \times 0.05$$

$$P(M_2|F) = \frac{P(M_2)P(F|M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i)P(F|M_i)} = \frac{0.5 \times 0.02}{0.2 \times 0.1 + 0.5 \times 0.02 + 0.3 + 0.05}$$

در مثال زیر بحث احتمال پیشین و احتمال پسین را توضیح می دهیم.

مثال: فردی سکه ای در دست دارد که ما احتمال می دهیم با احتمال 0.1 دوشیری باشد. (یعنی هر دو طرف آن شیر باشد)، برای بررسی اعتقاد خود از فرد مورد نظر می خواهیم سکه را دو بار پرتاب کند اگر هر دو بار شیر بیاید، احتمال اینکه سکه دوشیری باشد را بدست آورید.

حل: A: پیشامد اینکه سکه دوشیری باشد.

B: پیشامد اینکه سکه در هر دو پرتاب شیر بیاید.

$$P(A|B) = ?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')} = \frac{0.1 \times 1}{0.1 \times 1 + 0.9 \times (\frac{1}{4})} = 0.307$$

در این مثال $P(A)$ را احتمال پیشین و $P(A|B)$ را احتمال پسین می گوییم.

مثال: در ظرف A، 4 مهره قرمز و 7 مهره آبی و در ظرف B، 3 مهره قرمز و 2 مهره آبی قرار دارد. به تصادف مهره ای از ظرف A خارج کرده و به همراه مهره‌ای همرنگ آن وارد ظرف B می کنیم. سپس مهره‌ای به تصادف از ظرف B خارج می کنیم. اگر رنگ مهره دوم خارج شده قرمز باشد، احتمال اینکه مهره خارج شده از ظرف A قرمز باشد را به دست آورید.

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1)\,P(R_2|R_1)}{P(R_1)\,P(R_2|R_1) + P(R'_1)\,P(R_2|R'_1)}$$

$$= \frac{\frac{4}{11} \times \frac{5}{7}}{\frac{4}{11} \times \frac{5}{7} + \frac{7}{11} \times \frac{3}{7}}$$

مثال: در داخل ظرفی 12 مهره سفید و 18 مهره قرمز قرار دارد. از داخل ظرف مهره ها را یکی یکی و به ترتیب بدون جایگذاری خارج می کنیم، احتمال اینکه پنجمین مهره سفید در خارج کردن هفتمین مهره از ظرف مشاهده شود چقدر است؟

حل: اگر پنجمین مهره سفید در خارج کردن هفتمین مهره از ظرف مشاهده شود باید در شش مهره اول خارج شده از ظرف 4 مهره سفید مشاهده شده باشد که ترتیب این 4 مهره سفید اهمیت ندارد و احتمال آن برابر است با:

$$\frac{\binom{12}{4}\binom{18}{2}}{\binom{30}{6}}$$

از طرفی مهره هفتم باید سفید باشد که چون چهار مهره سفید از ظرف خارج شده، این احتمال برابر است با

$$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

لذا احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{12}{4}\binom{18}{2}}{\binom{30}{6}} \times \frac{1}{3}$$