متغیرهای تصادفی :

تعریف : اگر S یک فضای نمونه به همراه اندازه احتمال P باشد. در این صورت هر تابع حقیقی مقدار روی S را یک متغیر تصادفی می نامیم. معمولاً متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ مانند X ، Y ، ... و مقدار آن را با حروف کوچک مانند x و y ... نمایش می دهیم.

تعریف (تکیه گاه) :
مجموعه مقادیری که متغیر تصادفی X می تواند بگیرد را با S_X نمایش داده و آنرا تکیه گاه X می نامیم در واقع تکیه گاه X همان برد X است.

با توجه به شمارا یا ناشمارا بودن تکیه گاه یک متغیر تصادفی تعریفهای زیر را داریم :

تعریف (متغیر تصادفی گسسته) :
اگر مجموعه مقادیری که متغیر تصادفی X می تواند بگیرد شمارا باشد (متناهی یا نامتناهی) متغیر تصادفی X را گسسته گوییم.

تعریف (متغیر تصادفی پیوسته) :
اگر مجموعه مقادیری که متغیر تصادفی X می تواند بگیرد (تکیه گاه X) ناشمارا باشد متغیر تصادفی X را پیوسته گوییم.

به عنوان مثال اگر X را مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس تعریف کنیم، یا تعداد شیرهای ظاهر شده در پنج پرتاب متوالی سکه، X یک متغیر تصادفی گسسته است.

اگر X را طول عمر یک لامپ، وزن یک باروانت، قد دانشجویان، ... تعریف کنیم X یک متغیر تصادفی پیوسته است.

نکته : اگر S یک فضای نمونه گسسته باشد، متغیر تصادفی روی آن حتماً گسسته است ولی ممکن است فضای نمونه پیوسته باشد ولی متغیر تصادفی روی آن گسسته باشد.

به عنوان مثال میزان بارش باران را در طول یک ماه از سال در نظر بگیرید و فرض کنید X به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$X(L \geq 30) = 1$$

$$X(L < 30) = 0$$

که در اینجا L میزان بارندگی است. واضح است که فضای نمونه پیوسته است ولی متغیر تصادفی X فقط دو مقدار صفر و یک گرفته است. پس X متغیر تصادفی گسسته است.

مثال 1: فرض کنید در آزمایش پرتاب یک سکه سالم، متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده تعریف شود، در اینصورت:

$$S = \{H, T\}$$

X یک متغیر تصادفی گسسته است

$$X(H) = 1 \quad , \quad X(T) = 0$$

$$\Rightarrow S_X = \{0, 1\} \qquad P(X=0) = P(T) = 1/2$$

$$P(X=1) = P(H) = 1/2$$

مثال 2: فرض کنید در آزمایش پرتاب دو تاس، متغیر تصادفی X مجموع اعداد ظاهر شده روی آنها تعریف شود، در اینصورت:

$$S = \{(x, y) \mid x = 1, 2, \dots, 6 \, , \, y = 1, 2, \dots, 6\}$$

$$S_X = \{2, 3, \dots, 12\}$$ X یک متغیر تصادفی گسسته است.

$$X((3,4)) = 3 + 4 = 7, \qquad X((1,2)) = 3 \quad , \quad X((2,5)) = 2 + 5 = 7$$

$$P(X=3) = P(\{(x,y) \in S \mid x + y = 3\}) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(X=5) = P(\{(x,y) \in S \mid x + y = 5\}) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36}$$

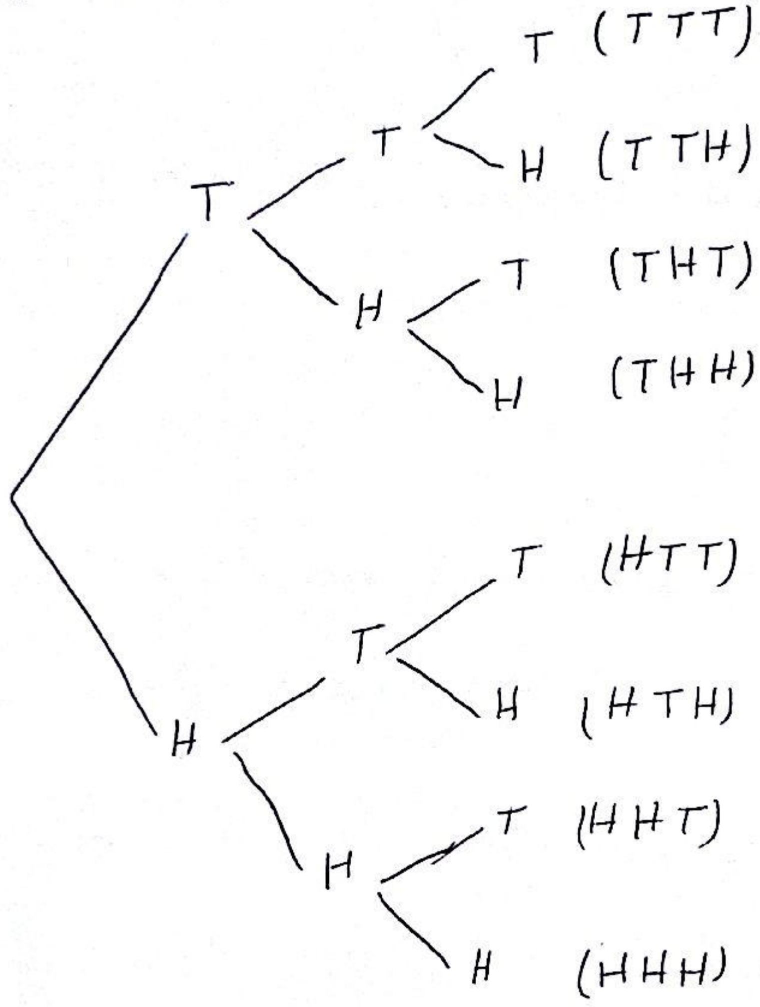
$$P(X \leq 4) = P(\{(x,y) \in S \mid x + y \leq 4\}) = P(\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X < 2.5) = P(\{(x,y) \in S \mid x+y < 2.5\}) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X < 15) = P(\{(x,y) \in S \mid x+y < 15\}) = P(S) = 1$$

$$P(X < 2) = P(\{(x,y) \in S \mid x+y < 2\}) = P(\emptyset) = 0$$

مثال 3: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X تعداد شیرهای ظاهرشده در این 3 پرتاب باشد. دراینصورت:



$$S = \{TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH\}$$

$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

X یک متغیر تصادفی گسسته است

$$P(X=0) = P(\text{هیچ شیری ظاهر نشود}) = \frac{\binom{3}{0}}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\text{یک شیر ظاهر شود}) = \frac{\binom{3}{1}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\text{دو شیر ظاهر شود}) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = P(\text{سه شیر ظاهر شود}) = \frac{\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P(X \leq 0.75) = P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X > 1.5) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

مثال ۴: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار شیر بیاید. متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تا اولین ظاهر شدن شیر تعریف می‌کنیم. در اینصورت:

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots\}$$

چون S_X شمارا است (شمارای نامتناهی) متغیر X گسسته است

$$S_X = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$P(X=n) = P(\underbrace{TTT\dots T}_{n-1 \text{ بار}}H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

احتمال اینکه X زوج باشد

$$P(X \in \{2, 4, 6, \dots\}) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$= \frac{1/4}{1 - 1/4} = 1/3$$

تمرین: احتمال اینکه X مضربی از سه باشد را بیابید

$$P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{i=1}^{3} P(X=i) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

مثال ۵: سکه اریبی را در نظر بگیرید که احتمال خط آمدن در آن دو برابر شیر است. این سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار شیر بیاید. مانند مثال قبل X را تعداد پرتاب‌های لازم تا مشاهده اولین شیر تعریف می‌کنیم. احتمال اینکه $X > 4$ را بیابید.

$$S_X = \{1, 2, 3, \dots\} \qquad P(X=n) = P(\underbrace{TT\dots T}_{n-1 \text{ بار}}H) = \left(2/3\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$P(X>4) = P(X=5) + P(X=6) + \dots$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 1/3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 1/3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 1/3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 1/3}{1 - 2/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

تابع جرم احتمال: اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هر مقدار حقیقی x، به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود.

$$f_X(x) = P(X=x)$$

تابع جرم احتمال یا تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌نامیم.

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی گسسته X باید در خواص زیر صدق کند.

1) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $0 \leq f_X(x) \leq 1$.

2) $$\sum_{x \in S_X} f_X(x) = 1$$

3) $$f_X(x) = \begin{cases} P(X=x), & x \in S_X \\ 0 & x \notin S_X \end{cases}$$

مثال 6: در مثال 3 تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

x	0	1	2	3	
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x}}{2^3} & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مثال 7: در مثال 4 تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}^x & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مثال 8: درداخل کیسه‌ای هفت مهره شماره‌گذاری شده از یک تا هفت قرار دارد. به تصادف از داخل کیسه سه مهره خارج می‌کنیم. فرض کنید X کمترین شماره در بین سه مهره باشد. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را بدست آورید.

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}}, \qquad P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}, \; \dots \; , \; P(X=i)=\frac{\binom{7-i}{2}}{\binom{7}{3}} \qquad i=1,2,\dots,5$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{\binom{7-x}{2}}{\binom{7}{3}} & x=1,2,\dots,5 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مثال: درداخل کیسه ای 3 مهره با شماره 1، 2 مهره با شماره دو و چهار مهره با شماره 3 موجود است. از داخل کیسه به تصادف سه مهره خارج می‌کنیم و Y را کوچکترین شماره در بین آنها باشد، تابع چگالی احتمال Y را بیابید.

$$S_Y=\{1,2,3\}$$

حل:

$$P(Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{3}{1}\binom{2}{2}+\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}$$

$$=\frac{3\times 2\times 4+3+3\times 6+3\times 2+3\times 4+1}{84}=\frac{64}{84}$$

$$P(Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}+\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{16}{84} \qquad P(Y=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

$f_Y(y)=?$

y	1	2	3	
$f_Y(y)$	$\frac{64}{84}$	$\frac{16}{84}$	$\frac{4}{84}$	1

توجه: $P(Y=1)=\dfrac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}+\binom{3}{2}\binom{6}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}=\dfrac{64}{84}$