معادله دیفرانسیل کامل: اگر دیفرانسیل کامل $\Phi(x,y)=c$ را در نظر بگیریم داریم:

$$d\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy=0$$

لذا اگر برای معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

تابعی مثل Φ موجود باشد که $\frac{\partial \Phi}{\partial x}=M(x,y)$ و $\frac{\partial \Phi}{\partial y}=N(x,y)$ دراینصورت معادله فوق را می‌توان بصورت $d\Phi=0$ نوشت و جواب عمومی آن $\Phi(x,y)=c$ می‌باشد. در چنین حالتی معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل کامل می‌گوییم.

قضیه:

هرگاه تابع $N(x,y)$ و $M(x,y)$ پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در ناحیه مستطیلی $D: a<x<b\ ,\ c<y<d$ باشد. آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه معادله $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ کامل باشد، این است که $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(ye^{x}+\sin(x))\,dx+(3y^{2}+e^{x})\,dy=0$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{x}+\sin(x))=e^{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(3y^{2}+e^{x})=e^{x}$$

لذا معادله دیفرانسیل کامل است.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=M(x,y)=ye^{x}+\sin(x)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \int y e^{x} + \sin(x)\, dx + g(y) = y e^{x} - \cos(x) + g(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \qquad e^{x} + g'(y) = 3y^2 + e^{x} \Rightarrow g(y) = y^3 + c$$

لذا جواب معادله

$$\phi(x,y) = y e^{x} - \cos(x) + y^3 + c = 0$$

مثال: معادله $(xy\cos(xy) + \sin(xy))dx + (x^2\cos(xy) + 2y)dy = 0$ با شرط اولیه $y(0) = 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy) + x\cos(xy)$$
$$= -x^2 y \cos(xy) + 2x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

لذا معادله کامل است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \phi = \int M(x,y)\, dx + g(y)$$

$$\phi = \int (xy\cos(xy) + \sin(xy))\, dx + g(y)$$

$$= x\sin(xy) + \frac{\cos}{y}(xy) - \frac{\cos(xy)}{y} + g(y)$$

$$= x\sin(xy) + g(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N \Rightarrow x^2\cos(xy) + g'(y) = x^2\cos(xy) + 2y$$

$$\Rightarrow g(y) = y^2 + c \Rightarrow \phi(x,y) = x\sin(xy) + y^2 + c = 0$$

نکته: جواب معادله دیفرانسیل کامل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

را می‌توان بصورت زیر بدست آورد.

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy = c$$

و در انتها مقادیر ثابت را با c در نظر گرفت.

مثال: $(3x^2+4xy-2)\,dx + (2x^2+6y^2)\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

$$\int_{x_0}^{x} (3x^2+4xy-2)\,dx + \int_{y_0}^{y} (2x^2+6y^2)\,dy = c$$

$$(x^3+2yx^2-2x)\Big|_{x_0}^{x} + (2x^2y+3y^3)\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$(x^3+2yx^2-2x)-(x_0^3+2yx_0^2-2x_0)+(2x^2y+3y^3)-(2x^2y_0+3y_0^3) =$$

$$x^3+2yx^2+2x+2x^2y+3y^3=c$$

مثال: معادله $e^{3x}(2xy+3x^2y+y^3)\,dx+(x^2e^{3x}+y^2e^{3x})\,dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{3x}+3x^2e^{3x}+3y^2e^{3x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2e^{3x}+2xe^{3x}+3y^2e^{3x}$$

لذا معادله کامل است.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2e^{3x}+y^2e^{3x}$$

$$\Phi = \int (x^2 e^{3x} + y^2 e^{3x})\, dy + g(x) = x^2 e^{3x} y + \frac{e^{3x}}{3} y^3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xye^{3x} + e^{3x} y^3 + e^{3x} 3x^2 y$$

$$\Phi(x,y) = x^2 e^{3x} y + \frac{e^{3x}}{3} y^3 = c$$

تعریف :

(عامل انتگرال) : اگر معادله دیفرانسیل $Mdx + Ndy = 0$ کامل نباشد ، یعنی شرط $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ، ممکن است با ضرب تابع $\mu(x,y)$ در معادله ، به معادله کامل تبدیل شود. در این صورت $\mu(x,y)$ را عامل انتگرال یا فاکتور انتگرال می گوییم.

مثال : معادله دیفرانسیل $3y^2 + 8x + 2xyy' = 0$ را می توان به فرم

$$(3y^2 + 8x)dx + 2xy\, dy = 0$$

نوشت که کامل نیست.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

اما اگر این معادله را در x^2 ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$(3x^2y^2 + 8x^3)\, dx + 2x^3 y\, dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2 y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2 y$$

که معادله دیفرانسیل کامل است.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2y^2 + 8x^3 \Rightarrow \Phi = \int (3x^2y^2 + 8x^3)\, dx + g(y)$$

$$\Phi = x^3y^2 + 2x^4 + g(y) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N = 2x^3 y$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x^3 y + g'(y) \Rightarrow g(y) = c$$

$$\Phi(x,y) = x^3y^2 + 2x^4 + c$$

مثال: مقدار m و n را چنان تعیین کنید که تابع $\mu = x^m y^n$ یک عامل انتگرال معادله $(x^2 + xy^2) y' - 3xy + 2y^3 = 0$ باشد.

$$(x^{m+2} y^n + x^{m+1} y^{n+2}) dy + (-3x^{m+1} y^{n+1} + 2x^m y^{n+3}) dx = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (m+2) x^{m+1} y^n + (m+1) x^m y^{n+2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3(n-1) x^{m+1} y^n + 2(n+3) x^m y^{n+2}$$

$$\begin{cases} -3n+3 = m+2 \\ 2n+6 = m+1 \end{cases} \qquad m=1 \ , \ n=-2$$

$$\mu(x,y) = \frac{x}{y^2}$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2} + x^2\right) dy + \left(-3\frac{x^2}{y} + 2xy\right) dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - \frac{3x^2}{y^2} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + \frac{3x^2}{y^2}$$

تذکر: لزوماً برای یک معادله دیفرانسیل غیرکامل نمی‌توان فاکتور انتگرال پیدا کرد.

قضیه: اگر μ تابعی از $z = z(x,y)$ باشد و $\mu(z)$ یک عامل انتگرال برای معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ باشد، آنگاه $\frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y}$ باید تابعی از z باشد و عامل انتگرال برابر است با

$$\mu(z) = e^{\int k(z) dz}$$

که در آن $k = \frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y}$.

1) اگر μ تابعی از x باشد:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

2) اگر μ تابعی از y باشد:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

3) اگر μ تابعی از $x+y$ باشد:

$$\mu(x+y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M} dz}$$

4) اگر μ تابعی از xy باشد:

$$\mu(xy) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM} dz}$$

5) اگر μ تابعی از x/y باشد:

$$\mu\left(\frac{x}{y}\right) = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} dz}$$

مثال:

1) $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

$$M_y - N_x = x + y \qquad \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x \Rightarrow (3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

$$\Phi(x,y) = \int (3x^2y + xy^2)dx = x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^3 + x^2y + g'(y) \Rightarrow \Phi(x,y) = x^3y + \frac{x^2}{2} = c$$

2) $3y^2 + 8t + 2tyy' = 0$

$$(3y^2 + 8t)dt + (2ty)dy = 0 \qquad \frac{M_y - N_t}{N} = \frac{6y - 2y}{2ty} = \frac{2}{t}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = t^2 \Rightarrow (3t^2y^2 + 8t^3)dt + 2t^3y\,dy = 0$$

$$\Phi(t,y) = \int 3t^2y^2 + 8t^3 dt = t^3y^2 + \frac{8}{4}t^4 + g(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = g'(y) + 2t^3y \Rightarrow t^3y^2 + 2t^4 = c$$

3) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$

$$M_y-N_x=(8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1)-(2xy^4e^y-2xy^2-3)$$

$$M_y-N_x=8xy^3e^y+8xy^2+4 \Rightarrow 4(2xy^3e^y+2xy^2+1)$$

$$\frac{M_y-N_x}{-M}=-\frac{4}{y} \Rightarrow \mu(y)=e^{\int -\frac{4}{y}dy}=e^{-4\ln(y)}=\frac{1}{y^4}$$

$$(2xe^y+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3})dx+(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4})dy=0$$

$$\phi=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+g(y)$$

$$\phi_y=x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4}+g'(y)$$

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=C$$

$$yN-xM=2xy\cos(x)-(2xy\cos(x)-x^2y\sin(x))$$