تعریف (تابع توزیع تجمعی): اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد. تابعی که با ضابطه‌ی

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

تعریف می‌کنیم را تابع توزیع تجمعی یا به اختصار تابع توزیع متغیر تصادفی X می‌نامیم.

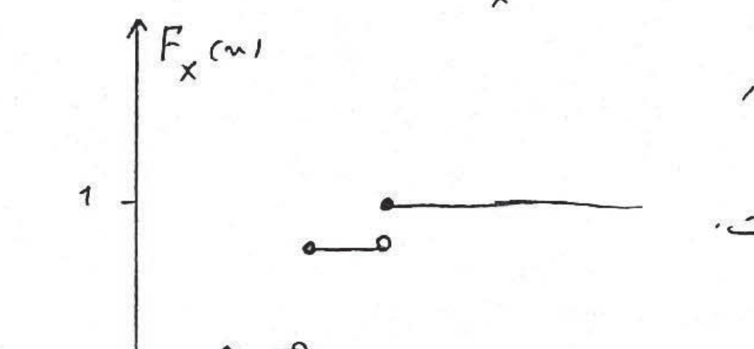
مثال ۱۰: با توجه به مثال ۶ و تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X، تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X را بدست آورده و نمودار آن را رسم نمایید.

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

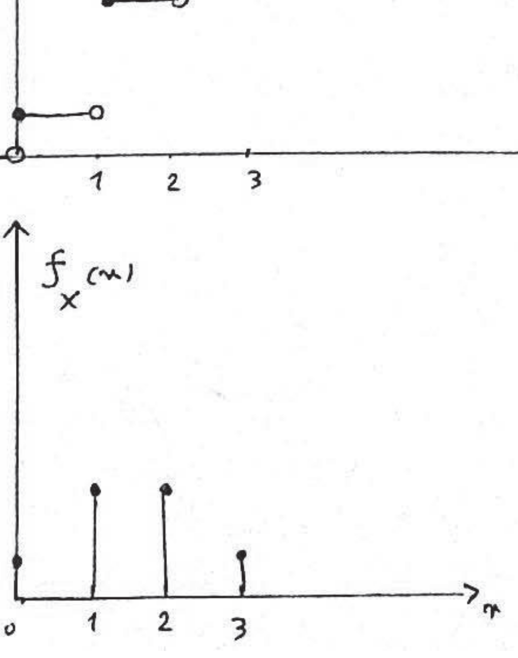
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$F_X(-1) = P(X \leq -1) = 0$$

$$F_X(0) = P(X \leq 0) = 1/8 \quad , \quad F_X(0.5) = P(X \leq 0.5) = \frac{1}{8}$$



توجه کنید که نمودار تابع جرم احتمال یک نمودار میله‌ای و نمودار تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته نمودار پله‌ای شکل است.



خواص تابع توزیع تجمعی : فرض کنید $F_X(x)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X باشد؛ در این صورت

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $F_X(x)$ یک تابع صعودی است: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

4) $F_X(x)$ تابعی از راست پیوسته است، یعنی $F(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$

* می توان نشان داد که هر تابعی که ویژگی های بالا را داشته باشد تابع توزیع یک متغیر تصادفی است.

تذکر 1 : اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، برای $x \in S_X$ ، $F_X(x)$ ناپیوستگی جهش دارد.

تذکر 2 : از فرمول زیر می توان برای محاسبه تابع توزیع تجمعی به کمک تابع جرم احتمال استفاده کرد:

$$F_X(x) = \sum_{\{x_i \in S_X :\, x_i \leq x\}} f_X(x_i)$$

تذکر 3 : با داشتن تابع توزیع تجمعی X، می توان تابع جرم احتمال آن را به کمک فرمول زیر محاسبه کرد:

$$f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

مثال ۱۱: تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر داده شده است، تابع جرم احتمال آن را محاسبه نمایید.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{3}{16} & 1\le x<2 \\ \frac{9}{16} & 2\le x<3.5 \\ \frac{12}{16} & 3.5\le x<5 \\ 1 & x\geq 5 \end{cases}$$

x	1	2	3.5	5	
$f_X(x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	1

قضیه: اگر برد متغیر تصادفی X متشکل از مقادیر $x_1<x_2<\dots<x_n$ باشد، آنگاه:

$$f_X(x_1)=F_X(x_1)$$

$$f_X(x_i)=F_X(x_i)-F_X(x_{i-1})$$

محاسبه احتمال به کمک تابع توزیع تجمعی: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته و $F_X(x)$ تابع توزیع تجمعی نظیر آن باشد؛ در این صورت

1) $P(X\leq a)=F_X(a)$

2) $P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$

$[P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F_X(b)-F_X(a)$

3) $P(a<X<b)=F_X(b^-)-F_X(a)$

4) $P(a\leq X\leq b)=F_X(b)-F_X(a^-)$

5) $P(X<b)=F_X(b^-)$

6) $P(X>a)=1-P(X\leq a)$
$=1-F_X(a)$

7) $P(X=b)=F_X(b)-F_X(b^-)$

مثال[12]: یک کلاس آمار 8 شاگرد دارد که 5 نفر آنها 19 ساله و 3 نفر آنها 21 ساله هستند، از این کلاس 2 شاگرد به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را میانگین سن این دو شاگرد تعریف می‌کنیم. تابع جرم احتمال و تابع توزیع تجمعی X را بیابید. همچنین $P(19<X<21)$ را بیابید.

حل:

$$S_X=\{19,20,21\}$$

$$f_X(19)=P(X=19)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28},\quad f_X(20)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}$$

$$f_X(21)=P(X=21)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

x	19	20	21	
$f_X(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<19\\ \frac{10}{28} & 19\le x<20\\ \frac{25}{28} & 20\le x<21\\ 1 & x\geq 21\end{cases}$$

$$P(19<X<21)=F_X(21^-)-F_X(19)=\frac{25}{28}-\frac{10}{28}=\frac{15}{28}$$

مثال: بررسی کنید آیا تابع

$$f(x)=\frac{x+2}{25}\quad x=1,2,\dots,5$$

می‌تواند چگالی احتمال یک متغیر تصادفی گسسته باشد؟

حل: چون $f_X(x)\geq 0$ ، و $\sum_{x\in S_X} f_X(x)=1$

لذا این تابع یک تابع جرم احتمال است.

تعریف (تابع چگالی): تابعی با مقادیر $f_X(x)$ که روی تمام اعداد حقیقی تعریف شده

است تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X خوانده می‌شود اگر و تنها اگر برای

هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b که $a \leq b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

نکته: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد با توجه به خاصیت انتگرال:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \cdots$$

تذکر: با توجه به تعریف فوق: $P(X=a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$

یعنی اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، احتمال وقوع یک نقطه برابر صفر است. به همین ترتیب احتمال رخ دادن هر مجموعه شمارا و یا در حالت کلی از اندازه صفر، صفر است.

قضیه: تابعی که به عنوان تابع چگالی احتمال یک متغیر پیوسته X به کار می‌رود باید:

1) برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f_X(x) \geq 0$.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

توجه کنید که لزومی ندارد $f_X(x) \leq 1$ چون $f_X(x)$ احتمال را نشان نمی‌دهد، بلکه

انتگرال آن احتمال را نشان می‌دهد.

مثال ۱۲: اگر X دارای چگالی احتمال

$$f_X(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

باشد مقدار k و $P(0.5 \leq X \leq 1)$ را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_{0}^{\infty} ke^{-3x}\,dx=-\frac{k}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty}=0-\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3}=1 \Rightarrow \underline{k=3}$$

$$P(0.5\leq X \leq 1)=\int_{0.5}^{1} 3e^{-3x}\,dx=-e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1}=-e^{-3}+e^{-3/2}=e^{-3/2}-e^{-3}$$

تعریف (تابع توزیع تجمعی): اگر X، متغیر تصادفی پیوسته‌ای باشد که مقدار چگالی

احتمال آن با $f_X(x)$، ارائه می‌شود، تابع

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

را تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X گوییم.

قضیه: اگر $f_X(x)$ و $F_X(x)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی

متغیر تصادفی پیوسته X باشند آنگاه. اگر $a\leq b$:

1) $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)$

2) $f_X(x)=\dfrac{dF_X(x)}{dx}$

مثال[13] : تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X در مثال قبل را بدست آورید :

اگر $x>0$:
$$F_X(x)=\int_0^x 3e^{-3t}\,dt=-e^{-3t}\Big|_0^x=-e^{-3x}-(-1)=1-e^{-3x}$$

اگر $x<0$:
$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x 0\,dt=0$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-3x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

مثال[14] : تابع توزیع متغیر تصادفی Y به صورت زیر است :

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{9}{y^2} & y>3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

مقدار $P(Y\leq 5)$ و $P(Y>8)$ ، $P(2<Y<4)$ ، $P(Y=6)$ را محاسبه نمایید.

$$P(Y\leq 5)=F_Y(5)=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$P(Y>8)=1-P(Y\leq 8)=1-\left(1-\frac{9}{64}\right)=\frac{9}{64}$$

$$P(2<Y<4)=P(Y\leq 4)-P(Y\leq 2)=\left(1-\frac{9}{16}\right)-0=\frac{7}{16}$$

$$P(Y=6)=0$$

مثال[15] : چگالی احتمال متغیر تصادفی Y به صورت زیر است :

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(y+1) & 2<y<4\\ 0 & o.w\end{cases}$$

مطلوبست $P(Y<3.2)$ و $P(2.9<Y<3.2)$

$$P(Y<3.2)=\int_{-\infty}^{3.2} f_Y(y)\,dy=\int_{2}^{3.2}\frac{1}{8}(y+1)\,dy=\frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{2}^{3.2}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{(3.2)^2}{2}+(3.2)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{4}{2}+2\right)=0.54$$

$$P(2.9<Y<3.2)=\int_{2.9}^{3.2} f_Y(y)\,dy=\int_{2.9}^{3.2}\frac{1}{8}(y+1)\,dy=\frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{2.9}^{3.2}$$

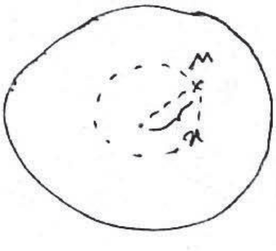
$$=0.15$$

مثال 16: نقطه M را به تصادف از داخل دایره ای به شعاع 2 و مرکز مبدأ انتخاب می کنیم.

X را فاصله بین این نقطه تا مرکز دایره تعریف می کنیم. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال

متغیر تصادفی X را به دست آورید.

اگر $0 \leq x \leq 2$ باشد،



$$P(X\leq x)=\frac{\pi x^2}{4\pi}=\frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{4} & 0\leq x\leq 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

مثال 17: طول عمر یک نوع خاص از دستگاه های رادیویی تابع چگالی احتمال زیر را دارد:

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & x\leq 100\\ \frac{100}{x^2} & x>100\end{cases}$$

در یک مرکز رادیویی 5 دستگاه به طور مستقل از هم در حال کار هستند. احتمال اینکه دو

دستگاه، در کمتر از 150 ساعت خراب شوند چقدر است؟

حل : A : پیشامد اینکه دو دستگاه در کمتر از 150 ساعت خراب شوند.

$$P(X \leq 150) = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\, dx = -\frac{100}{x}\Big|_{100}^{150} = -\frac{2}{3} + 1 = 1/3$$

$$P(X \geq 150) = 1 - 1/3 = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \binom{5}{2} (1/3)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

مثال 18 : مدت زمانی که یک کامپیوتر بر حسب ساعت بدون خطا کار می کند یک متغیر تصادفی

با تابع چگالی احتمال به صورت روبرو است :
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) احتمال اینکه این کامپیوتر بین 50 تا 150 ساعت بدون خطا کار کند چقدر است؟
ب) احتمال اینکه این کامپیوتر در کمتر از 100 ساعت دچار خطا شود چقدر است؟

$$P(50 \leq X \leq 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\, dx = -e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{50}^{150} = -e^{-\frac{3}{2}} + e^{-1/2}$$

$$P(X \leq 100) = \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\, dx = -e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{0}^{100} = 1 - e^{-1}$$

مثال 19 : فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد :
$$f_X(x) = \begin{cases} c\, x^2 e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.
ب) $P(X > 5)$ را بیابید.

حل :

الف) $\Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} c\,x^2 e^{-2x}\,dx$

$$= c\left(-\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right)e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{c}{4}\right) = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 4$$

ب) $P(X>5) = \int_5^{\infty} 4x^2 e^{-2x}\,dx = 4\left(-\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right)e^{-2x}\Big|_5^{\infty}$

$$= 0 - (-61e^{-10}) = 61e^{-10}$$

	u	dv
$+$	x^2	e^{-2x}
$-$	$2x$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
$+$	2	$\frac{1}{4}e^{-2x}$
$-$	0	$-\frac{1}{8}e^{-2x}$