

مثال: دو قرص به تصادف از داخل سینیهای که محتوی 3 قرص آسپرین، 2 قرص خواب آور و 4 قرص دیابت است، انتخاب می کنیم. اگر X و Y به ترتیب تعداد قرص های آسپرین و قرص های خواب آور باشد که بین دو قرص انتخاب شده قرار دارد، احتمال های مربوط به همه جفت مقادیر ممکن X و Y را بیابید.

حل: $S_X = \{0, 1, 2\}$, $S_Y = \{0, 1, 2\}$

$x \backslash y$	0	1	2	$f_Y(y)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{7}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_X(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

$$(X, Y) = \{(x, y) \mid x \in S_X, y \in S_Y\}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{0}}{\binom{9}{2}}$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{0} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{3}{x} \binom{2}{y} \binom{4}{2-x-y}}{\binom{9}{2}}$$

تعریف: اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابعی که با ضابطه

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X=x, Y=y)$$

برای هر جفت مقدار (x, y) در برد متغیرهای تصادفی X و Y داده می شود، تابع چگالی

احتمال توأم X و Y خوانده می شود. تابع توزیع توأم X و Y نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$= \sum_{\substack{\{i: x_i \leq x\} \\ \{j: y_j \leq y\}}} f(x_i, y_j)$$

در مثال قبل :

$$F_{X,Y}(1.5, 1) = P(X \leq 1.5, Y \leq 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{8}{9}$$

$$F_{X,Y}(1, 0.75) = P(X \leq 1, Y \leq 0.75) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$F_{X,Y}(2.25, 1.5) = P(X \leq 2.25, Y \leq 1.5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{35}{36}$$

نکته: با توجه به خواص احتمالات باید داشته باشیم :

$$1) f_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

$$2) \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} f_{X,Y}(x,y) = 1$$

تعریف: اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند و $f_{X,Y}(x,y)$ تابع چگالی توأم

آنها باشد، در این صورت تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y به صورت زیر تعریف

$$f_X(x) = \sum_{y \in S_Y} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{می‌گردد:}$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in S_X} f_{X,Y}(x,y)$$

تعریف: دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گوئیم هرگاه

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

مثال: در جعبه‌ای هفت‌صفره با شماره‌های 1 تا 7 قرار دارند، از داخل جعبه 3 صفر به تصادف

خارج می‌کنیم. X را کمترین شماره و Y را بزرگترین شماره صفرهای خارج شده تعریف می‌کنیم.

چگالی توأم و حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی X و Y را بیابید.

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad S_Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	$f_Y(y)$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	0	0	$\frac{1}{35}$
4	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$\frac{3}{35}$
5	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{35}$	0	0	$\frac{6}{35}$
6	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{35}$	0	$\frac{10}{35}$
7	$\frac{5}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{15}{35}$
$f_X(x)$	$\frac{15}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

مثال ۳: در جعبه‌ای 6 مهره با شماره‌های 1 تا 6 موجود است. مهره‌ای به تصادف انتخاب

کرد. و شماره آن را X تعریف می‌کنیم. مهره دیگری از بین مهره‌های 1، 2، ...، X به تصادف

انتخاب می‌کنیم. و شماره مهره دوم را Y «نظری می‌گیریم». چگالی توأم X و Y را بیابید.

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6	$f_Y(y)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	
3	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	
4	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	
5	0	0	0	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	