تعریف: یک تابع دو متغیره با مقادیر $f_{X,Y}(x,y)$ ، که روی صفحه xy تعریف شده است را تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y می نامند اگر و تنها اگر برای هر ناحیه مانند A از صفحه xy داشته باشیم :

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

همچنین تابعی که به صورت

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X\leq x, Y\leq y)$$
$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

تعریف می شود را تابع توزیع توام متغیرهای تصادفی X و Y می نامند و چگالی حاشیه‌ای متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می گردد :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

نکته : با توجه به خواص تابع اندازه احتمال ، $f_{X,Y}(x,y)$ باید در شرایط زیر صدق کند :

1) $f_{X,Y}(x,y)\geq 0$

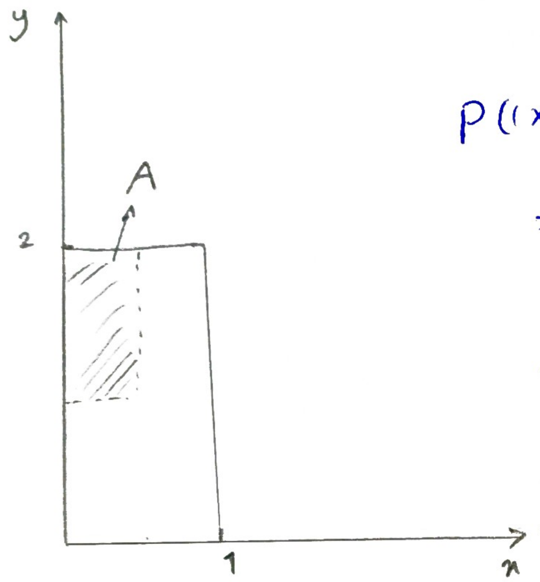
2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt = 1$

3) $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{X,Y}(x,y)$

مثال: اگر تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{5}x(y+x) & 0<x<1,\ 0<y<2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

باشد، $P((X,Y)\in A)$ که در آن A ناحیه $\{(x,y)\mid 0<x<1/2,\ 1<y<2\}$ است، را بیابید.



$$P((X,Y)\in A)$$
$$=\iint_A \frac{3}{5}x(y+x)\,ds$$
$$=\int_0^{1/2}\int_1^2 \frac{3}{5}x(y+x)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^{1/2}\frac{3}{5}x\left(\frac{y^2}{2}+x.y\right)\Big|_{y=1}^{2}dx$$
$$=\frac{3}{5}\int_0^{1/2}\left[2x+2x^2-\left(\frac{x}{2}+x^2\right)\right]dx$$
$$=\frac{3}{5}\int_0^{1/2}\left(\frac{3}{2}x+x^2\right)dx=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/2}=\frac{3}{5}\times\frac{11}{48}$$

مثال: اگر چگالی توام X و Y به صورت زیر باشد،

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x,y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

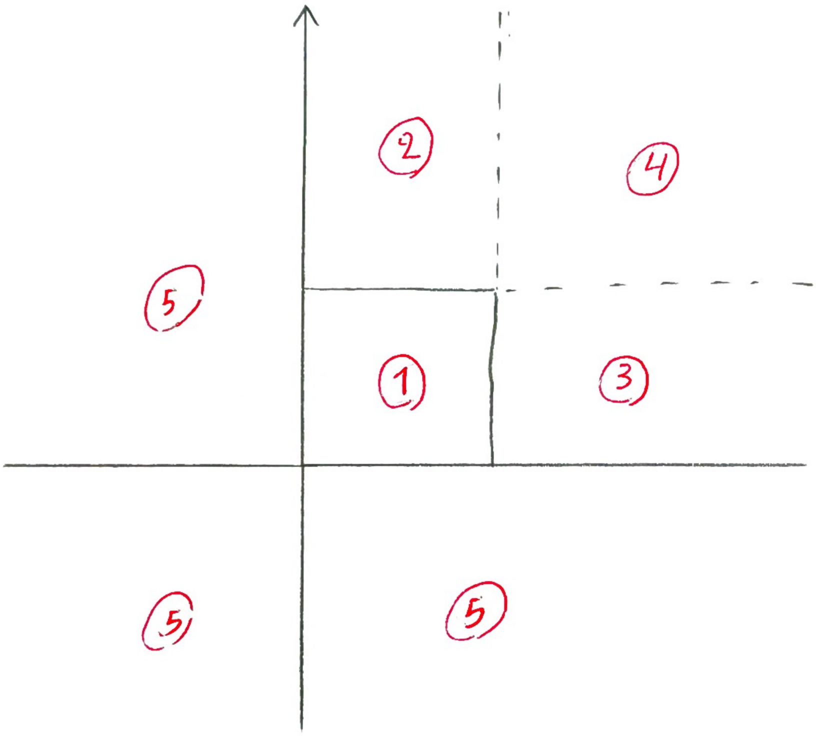
تابع توزیع توام این دو متغیر تصادفی را بیابید. بعلاوه، چگالی حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

اگر $0<x<1/2$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1(x+y)\,dy$$
$$=xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\left(x+\frac{1}{2}\right)-0=x+\frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x + 1/2 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + 1/2 & 0 < y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$



$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

حالت اول اگر $0 < x,y < 1$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^x \int_0^y (x+y)\, dy\, dx = \int_0^x xy + y^2/2 \Big|_0^y dx$$

$$= \int_0^x xy + y^2/2 \, dx = x^2/2\, y + y^2/2\, x = 1/2\, xy(x+y)$$

حالت دوم اگر $0 < x < 1$ ، $y \geq 1$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_0^1 (x+y)\, dy\, dx = \dots = 1/2\, x(x+1)$$

حالت سوم اگر $x \geq 1$ و $0 < y < 1$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 \int_0^y (x+y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2} y (y+1)$$

حالت چهارم اگر $y \geq 1, x \geq 1$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\, dy\, dx = 1$$

حالت پنجم اگر $x \leq 0$ یا $y \leq 0$:

$$F_{X,Y}(x,y) = 0$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} xy(x+y) & 0 < x,y < 1 \\ \frac{1}{2} x(x+1) & 0 < x < 1,\ y \geq 1 \\ \frac{1}{2} y(y+1) & 0 < y < 1,\ x \geq 1 \\ 1 & y \geq 1,\ x \geq 1 \\ 0 & x \leq 0 \text{ یا } y \leq 0 \end{cases}$$

مثال : اگر توزیع توام متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد،

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x > 0, y > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال توام X و Y را بیابید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{-y}(1-e^{-x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = e^{-y} e^{-x} = e^{-(x+y)}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تعریف: اگر $f_{X,Y}(x,y)$ مقدار تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی گسسته X و Y باشد و $f_Y(y)$ چگالی حاشیه‌ای Y باشد، تابعی که به صورت زیر برای هر $x \in S_X$ تعریف می‌شود را چگالی شرطی X به شرط $Y=y$ می‌نامند.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

به همین ترتیب داریم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

تذکر: چگالی شرطی به طور مشابه برای متغیرهای تصادفی پیوسته نیز تعریف می‌گردد:

مثال: در مثال مربوط به ترص های خارج شده از شیشه، احتمال شرطی X به شرط $Y=1$ را بیابید:

x	0	1	2
$f_{X\|Y}(x\|1)$	$4/7$	$\frac{3}{7}$	0

$$f_{X|Y}(0|1) = \frac{\frac{2}{9}}{7/18} = \frac{4}{7}$$

$$f_{X|Y}(1|1) = \frac{1/6}{7/18} = \frac{3}{7}$$

$$f_{X|Y}(2|1) = \frac{0}{7/18} = 0$$

$$P(X \le 1 | Y=1) = 1$$

$$P(X \le 1 | Y=0) = \frac{P(X \le 1, Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$= \frac{1/6 + 1/3}{7/12} = \frac{1/2}{7/12} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

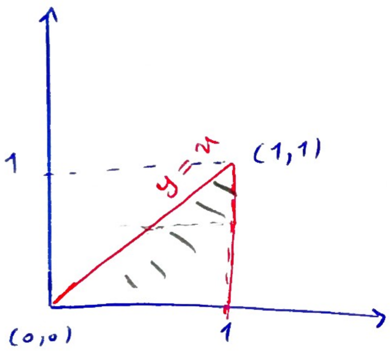
مثال: چگالی توام متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} axy & 0<x<1,\ 0\leq y<x \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) a را بیابید.

ب) چگالی های حاشیه ای X و Y را بیابید و سپس چگالی شرطی X به شرط $Y=y$ را بیابید.

ج) $P(X\leq \frac{2}{3} \mid Y=\frac{1}{2})$ را بیابید.



الف)

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^x axy \quad dy\,dx$$

$$=a\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{x}dx$$

$$=a\int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = a\frac{x^4}{8}\Big|_0^1=\frac{a}{8} \Rightarrow \frac{a}{8}=1 \Rightarrow a=8$$

ب)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$0<x<1 \Rightarrow f_X(x)=\int_0^x 8xy\,dy=8x\frac{y^2}{2}\Big|_0^x=4x^3$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 4x^3 & 0<x<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$0<y<1 \Rightarrow f_Y(y)=\int_y^1 8xy\,dy = 4x^2y\Big|_y^1=4(y-y^3)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 4(y-y^3) & 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$0 < y < 1 \qquad f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{8xy}{4(y-y^3)} = \dfrac{2x}{1-y^2}$

$0 < y < 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-y^2} & y < x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|\tfrac{1}{2}) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3/4} & \tfrac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} = \begin{cases} \tfrac{8}{3}x & \tfrac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \quad (2$$

$$P(X \leq \tfrac{2}{3} \mid Y = \tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{2/3} \tfrac{8}{3} x \, dx = \tfrac{8}{6} x^2 \Big|_{1/2}^{2/3} = \tfrac{8}{6}(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{4})$$