اعداد مختلط:

همانطور که می‌دانید معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

در صورتی که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ جواب حقیقی ندارد. به عنوان مثال چون مربع هر عدد حقیقی یک عدد مثبت است لذا معادله $x^2 + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد. در قرن هجدهم لئونارد اویلر در کتاب عناصر جبر به معرفی عدد $\sqrt{-1}$ پرداخت عددی که در بین اعداد حقیقی نیست ولی با این وجود می توان آنرا تصور کرد و از اینرو عدد موهومی نامیده می‌شود. او این عدد را با $i = \sqrt{-1}$ نماد گذاری کرد. در نهایت با تلاش های اویلر و گاوس اعداد حقیقی به اعداد مختلط توسیع داده شدند به طوری که همه معادلات درجه دو دارای جواب باشند.

تعریف: یک عدد موهومی عددی است که مربع آن یک عدد حقیقی منفی است. به عنوان مثال

$$\sqrt{-1}, \sqrt{-7}, \sqrt{-18}, \ldots$$

اگر $i = \sqrt{-1}$ ، یعنی $i^2 = -1$ ، در این صورت همه اعداد موهومی می توانند به کمک i به صورت ai بیان شوند که a عددی حقیقی است:

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}i, \ \sqrt{-18} = 3\sqrt{2}i$$

در حالت کلی اگر $c < 0$ باشد، $\sqrt{c} = \sqrt{-c}\, i$. توجه داشته باشید که اگر $i^2 = -1$ در این صورت $(-i)^2 = -1$.

حال به معرفی اعداد مختلط می‌پردازیم، اعدادی که قسمتی حقیقی و قسمتی موهومی دارند:

تعریف: هر عدد به فرم $a + bi$ را که در آن a,b اعدادی حقیقی هستند را یک عدد مختلط می‌نامیم. a را قسمت حقیقی و b را قسمت موهومی عدد مختلط $z = a + bi$ می‌نامیم.

$$\mathrm{Re}(z) = a \quad , \mathrm{Im}(z) = b$$

معمولا یک عدد مختلط را با نماد z,w نمایش می دهیم. مجموعه تمام اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شود:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Re}(1 + 2i) = 1 \quad , \mathrm{Im}(1 + 2i) = 2$$

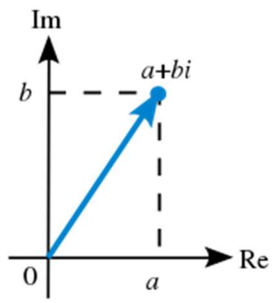
واضح است که یک تناظر یک به یک بین $\mathbb{R}^2$ و اعداد مختلط برقرار است از اینرو اعداد مختلط را می‌توان به صورت زوج مرتب $z = (a,b)$ نیز نمایش داد. این نمایش از اعداد مختلط را نمایش هندسی یا دکارتی اعداد مختلط می‌گویند. توجه کنید که نمایش $z = a + bi$ را نمایش جبری اعداد مختلط می‌نامند.

تساوی دو عدد مختلط: دو عدد مختلط با هم برابرند هرگاه قسمت حقیقی و موهومی آنها با هم برابر باشد.

حساب اعداد مختلط: در ادامه می‌خواهیم به تعریف عمل جمع و ضرب اعداد مختلط بپردازیم.

عمل جمع دو عدد مختلط $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$



شکل ۱ صفحه مختلط

برای تعریف عمل ضرب دو عدد مختلط مانند ضرب معمولی عمل می‌کنیم وفقط کافیست به جای i^2 مقدار -1 قرار دهیم:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

توجه: مجموعه اعداد مختلط نسبت به جمع و ضرب تعریف شده بسته است.

مثال:

$$\begin{aligned} &(1 + 3i) + (1 + 4i) = 2 + 7i \\ &(1 + 3i)(1 + 4i) = 1 + 4i + 3i + 12i^2 = -11 + 7i \\ &(1 + 4i)(1 - i) = 1 + 4i - i - 4i^2 = 5 + 3i \end{aligned}$$

تذکر: به سادگی می‌توان دید که $(0,0) = 0$ عضو خنثی در جمع و $(1,0) = 1$ عضو خنثی در ضرب روی اعداد مختلط هستند.

خواص جمع و ضرب اعداد مختلط:

جابجایی در جمع: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

شرکت پذیری در جمع: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

جابجایی در ضرب: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

شرکت پذیری در ضرب: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

پخش پذیری ضرب نسبت به جمع: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

وارون جمعی هر عدد مختلط $z=(a,b)$ را به صورت $-z=(-a,-b)$ تعریف می‌کنیم، واضح است که

$$z+(-z)=0$$

لذا عمل تفریق در اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$$

تعریف: مزدوج عدد مختلط $z=a+bi$ را با $\overline{z}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

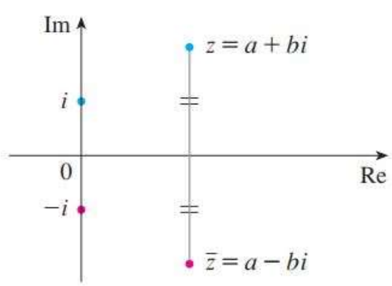
$$\overline{z}=a-bi$$

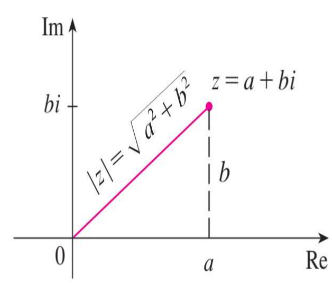
مثال:

$$\overline{2-3i}=2+3i,\quad \overline{1-\sqrt{2}i}=1+\sqrt{2}i,\quad \overline{3i}=-3i,\quad \overline{6}=6$$

تعریف: اندازه عدد مختلط $z=a+bi$ را فاصله آن از مبداء تعریف می‌کنیم:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$





خواص مزدوج:

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\qquad \overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}\quad \overline{z^n}=\overline{z}^n\quad z\overline{z}=|z|^2$$
$$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)\qquad z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$$

تعریف: وارون ضربی عدد مختلط $z=a+bi$ که $z\neq 0$ ، عدد مختلطی مانند w تعریف می‌شود که $zw=1$. وارون ضربی z را با $z^{-1}=\dfrac{1}{z}$ نمایش می‌دهیم.

برای پیدا کردن وارون ضربی z ، کافیست برای محاسبه $\dfrac{1}{z}$ صورت و مخرج را در $\overline{Z}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

مثال:

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

حال که وارون ضربی را تعریف کردیم، می‌توانیم تقسیم را نیز تعریف کنیم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 {z_2}^{-1}$$

جهت محاسبه تقسیم هم مشابه پیدا کردن وارون ضربی عمل میکنیم و صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌نماییم.

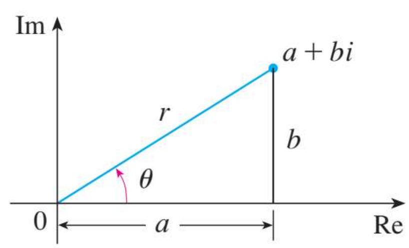
مثال:

$$\frac{1-3i}{3+4i} = \frac{1-3i}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i-9i+12i^2}{25} = \frac{-9}{25} - \frac{13}{25}i$$

نمایش قطبی اعداد مختلط: هر عدد مختلط $z = a + bi$ را می توان به صورت زوج مرتب (a,b) در نظر گرفت و هر نقطه ای در صفحه $\mathbb{R}^2$ را می‌توان در مختصات قطبی با (r,θ)، $r \geq 0$ مطابق شکل زیر نمایش داد که درآن :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ,\tan\theta = \frac{b}{a}$$

دقت کنید θ طوری انتخاب می‌شود که با ربعی که نقطه z در آن قرار دارد مطابقت داشته باشد.



در این صورت هر عدد مختلط مانند z را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,cis(\theta)$$

θ را آرگومان z گویند و می‌نویسیم $\theta = \arg(z)$. توجه کنید که آرگومان یک عدد مختلط منحصر به فرد نیست و اگر θ آرگومان z باشد در این صورت $\theta + 2k\pi$ نیز آرگومان z است. اگر $-\pi < \theta \leq \pi$ در اینصورت θ را آرگومان اصلی z نامیده و داریم $\theta = Arg(z)$.

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را بیابید:

$1)\ z = 1 + i$

حل: $r = \left|z\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ و $\tan\theta = 1$ از طرفی چون نقطه $(1,1)$ در ربع اول قرار دارد، پس $\theta = \frac{\pi}{4}$ بنابراین

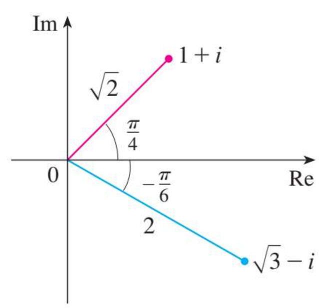
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$2)\ z = \sqrt{3} - i$

حل: $r = \left|z\right| = \sqrt{3+1} = 2$ و $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ از طرفی چون نقطه $(\sqrt{3},-1)$ در ربع چهارم قرار دارد، پس

$\theta = -\frac{\pi}{6}$ بنابراین

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

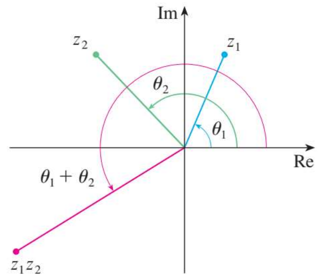


تعبیر هندسی ضرب دو عدد مختلط: اعداد مختلط z_1 و z_2 را در مختصات قطبی در نظر بگیرید.

$$z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right), \quad z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\ \left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \\ &= r_1 r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right] \\ &= r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right) \end{aligned}$$



به همین ترتیب داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right)$$

نتیجه:

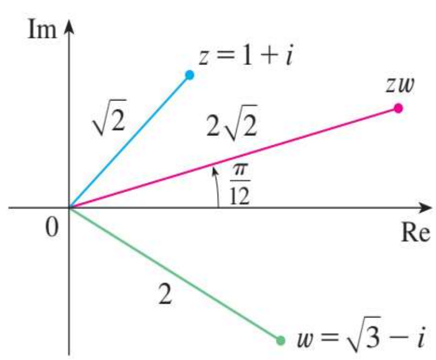
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

مثال: فرم قطبی ضرب $1 + i$ و $\sqrt{3} - i$ را به دست آورید.

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(1 + i\right)\left(\sqrt{3} - i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$



فرمول دموآور: حال به محاسبه توان های عدد مختلط z در فرم قطبی می‌پردازیم:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

با ادامه این روند به فرمول دموآور می‌رسیم:

قضیه: اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و n عدد صحیح مثبتی باشد در اینصورت

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال: مقدار $(1+i)^{10}$ را بیابید.

حل: داریم $$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

لذا به کمک فرمول دموآور داریم:

$$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32\,i$$

فرمول دموآور می‌تواند به ما جهت یافتن ریشه های n ام یک عدد مختلط کمک کند.

تعریف: عدد مختلط w را یک ریشه n ام عدد مختلط z گوییم هرگاه

$$w^n = z$$

اگر فرم قطبی z و w را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ \ w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

با استفاده از فرمول دموآور داریم:

$$s^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

لذا:

$$s = r^{1/n},\ \ \cos\left(n\phi\right) = \cos\theta,\ \ \sin\left(n\phi\right) = \sin\theta$$

با توجه به اینکه توابع سینوس و کسینوس توابعی متناوب با دوره تناوب 2π هستند باید داشته باشیم:

$$n\phi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین:

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

با توجه به اینکه به ازای مقادیر مختلف $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ ، w مقادیر مختلفی به دست می‌آید، داریم:

ریشه های یک عدد مختلط: فرض کنید $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ و n عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت z دارای n ریشه متمایز است که به کمک فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad (۱)$$

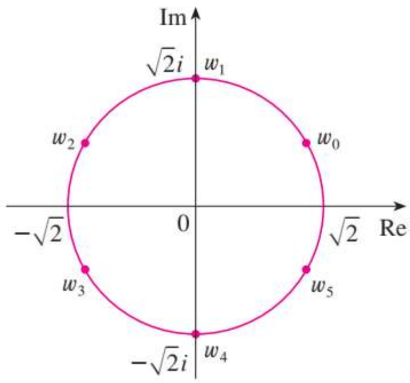
مثال: همه ریشه های ششم عدد -8 را به دست آورید.

حل: ابتدا فرم قطبی عدد $z=-8$ را به دست می‌آوریم. داریم $r = 8, \theta = \pi$ لذا $z = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$ پس با توجه به فرمول (۱) و قرار دادن $k = 0,1,2,\ldots,5$ ریشه های ششم آنرا به دست می‌آوریم:

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}
w_0 &= 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\
w_1 &= 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i\\
w_2 &= 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\
w_3 &= 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\
w_4 &= 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}i\\
w_5 &= 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)
\end{aligned}$$

اگر این ریشه ها را در صفحه مختلط مشخص کنیم همگی روی یک دایره به شعاع $\sqrt{2}$ قرار می‌گیرند و با وصل کردن نقاط روی دایره به یک شش ضلعی منتظم می‌رسیم:



مثال: ریشه های چهارم i را محاسبه کنید.

حل: اگر $z = i$ در این صورت $r = 1$ و $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ پس فرم قطبی z به صورت $z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ پس با توجه به فرمول (۱) ریشه های چهارم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$w_k = cis\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$
$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$$
$$w_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$$
$$w_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$$

مثال: ریشه های چهارم $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ را به دست آورید.

حل:

$$r = \sqrt{64 + 192} = 16$$
$$\tan\theta = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$
$$z = 16\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$w_k = 2cis\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right), \qquad k = 0,1,2,3$$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i \\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i \\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i \\
w_3 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

حال که در مورد ریشه های n ام یک عدد مختلط بحث کردیم، میتوانیم تابع $\sqrt{z}$ را تعریف کنیم. اگر

$$
z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), -\pi < \theta \le \pi
$$

در اینصورت $w = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ وضوحا در $w^2 = z$ صدق می‌کند، این عدد را ریشه دوم اصلی z تعریف می‌کنیم و با $\sqrt{z}$ نمایش می‌دهیم. دقت کنید که قسمت حقیقی $\sqrt{z}$ همیشه نامنفی است.

مثال:

$$
\sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
$$

مثال: ریشه های دوم $z = -15 - 8i$ را بیابید.

حل: دقت کنید که در این مثال یافتن θ به طوری که $\tan\theta = \frac{8}{15}$ ساده نیست اما می‌توان به کمک اتحاد های مثلثاتی $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ را به دست آورد. ما در اینجا قصد داریم از راه حل دیگری به این مقصود برسیم. فرض کنید $w = x + iy$ ریشه دوم z باشد. پس داریم:

$$
\begin{aligned}
&w^2 = z = -15 - 8i \\
&(x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = -15 - 8i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \Rightarrow xy = -4 \Rightarrow y = -\dfrac{4}{x} \end{cases} \\
&x^2 - \left(-\frac{4}{x}\right)^2 = -15 \Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15 \Rightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0 \Rightarrow \left(x^2 + 16\right)\left(x^2 - 1\right) = 0 \\
&x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -4 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

لذا ریشه ها به صورت $1 - 4i$ و $-1 + 4i$ هستند.

تمرین: نشان دهید مجموع تمام ریشه های n ام واحد برابر صفر است.

فرم نمایی اعداد مختلط:

فرمول اویلر: ابتدا $e^{i\theta}$ را براساس فرمول اویلر به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = cis\,\theta$$

به کمک این فرمول فرم قطبی را می توان به طور خلاصه تری به صورت نمایی نمایش داد:

$$z = re^{i\theta}$$

در ادامه توضیح مختصری در مورد این نمادگذاری می‌دهیم. همانطور که می دانید بسط تیلور تابع نمایی e^z به صورت زیر است:

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

می‌توان نشان داد این تابع خواص مشابه تابع حقیقی e^x را دارد. در حالت خاص:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

با توجه به این واقعیت که:

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 i = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

داریم:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{\left(i\theta\right)^2}{2!} + \frac{\left(i\theta\right)^3}{3!} + \frac{\left(i\theta\right)^4}{4!} + \frac{\left(i\theta\right)^5}{5!} + \frac{\left(i\theta\right)^6}{6!} + \dots. \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots. \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

با توجه به بحث فوق داریم:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

مثال: مقدار $e^{i\pi}$ و $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
&e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
&e^{-1+i\frac{\pi}{2}} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{e}
\end{aligned}$$

با توجه به خواص تابع نمایی e^z اگر $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
&z_1z_2 = r_1r_2e^{i\left(\theta_1+\theta_2\right)} \\
&\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}$$

که اثبات ساده تری از روابطی است که قبلا بیان کرده بودیم. به همین ترتیب قضیه دموآور را نیز می‌توان به صورت ساده تری اثبات کرد:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$$

ریشه های چند جمله ای درجه دو:

مثال: ریشه های چندجمله ای درجه دو زیر را بیابید.

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

حل: با توجه به اینکه جواب معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ را می‌توان به کمک فرمول

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

به دست آورد، داریم

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{\left(4 - 8\right)}}{2} = 1 \pm i$$

توجه کنید که از فرمول بالا همچنان می‌توان برای به دست آوردن ریشه های چند جمله ای درجه دو با ضرایب مختلط نیز استفاده کرد.

مثال: معادله $z^2 + \left(2i - 3\right)z + 5 - i = 0$ را حل کنید.

$$\Delta = \left(-3 + 2i\right)^2 - 4\left(5 - i\right) = -15 - 8i$$

از طرفی قبلا دیدیم که $\sqrt{-15 - 8i} = 4 - i$ پس جواب مساله به صورت زیر است:

$$z = \frac{-\left(2i - 3\right) \pm \left(1 - 4i\right)}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$$

قضیه اساسی جبر: چند جمله ای درجه n به فرم $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ که در آن a_i ها همگی اعداد مختلطی هستند و $a_n \neq 0$ در میدان اعداد مختلط دقیقا دارای n ریشه است (ممکن است ریشه ها تکراری باشند).

اگر این ریشه ها را با $z_1, z_2, \ldots, z_n$ نمایش دهیم میتوان $P_n(z)$ را به صورت زیر نوشت:

$$P_n(z) = \left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)\ldots\left(z - z_n\right)$$

نکته: اگر تمام ضرایب $P_n(z)$ حقیقی باشند، در این صورت مزدوج هر ریشه این چند جمله ای خود یک ریشه آن خواهد بود.

نتیجه: هر چند جمله ای با درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

مثال: فرض کنید α یک عدد حقیقی باشد و $z=i$ یک جواب معادله $z^3-z^2+z+1+\alpha=0$ باشد. همه جواب های این معادله را به دست آورید.

حل: ابتدا i را در معادله قرار می‌دهیم. داریم:

$$i^3-i^2+i+1+\alpha=0 \Rightarrow -i+1+i+1+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-2$$

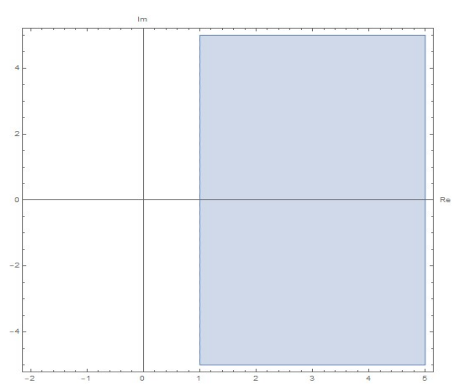
پس معادله به صورت $z^3-z^2+z-1=0$ خواهد بود. ازطرفی چون ضرایب چند جمله ای حقیقی هستند پس مزدوج i یعنی $-i$ نیز یک جواب معادله است. وضوحا این معادله جواب حقیقی برابر یک دارد (مجموع ضرایب برابر صفر است) پس جواب های این معادله برابرند با:

$$z_1=i, z_2=-i, z_3=1$$

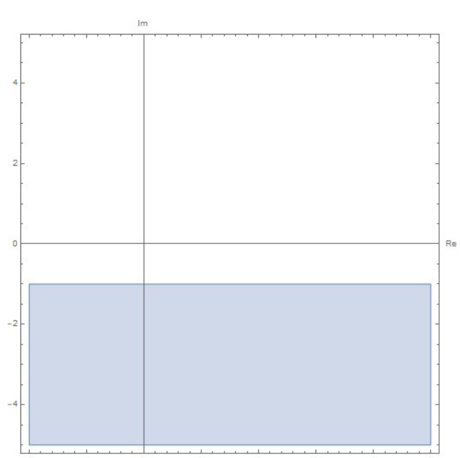
مکان هندسی در صفحه اعداد مختلط:

مثال: مکان هندسی نقاطی در صفحه که توسط روابط زیر مشخص شده اند به دست آورید.

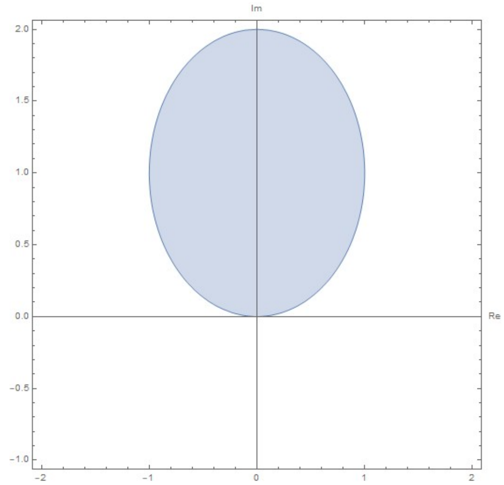
1) $\mathrm{Re}(z)\geq 1$



2) $\mathrm{Im}(z)\leq -1$



3) $\left|z-i\right|<1$

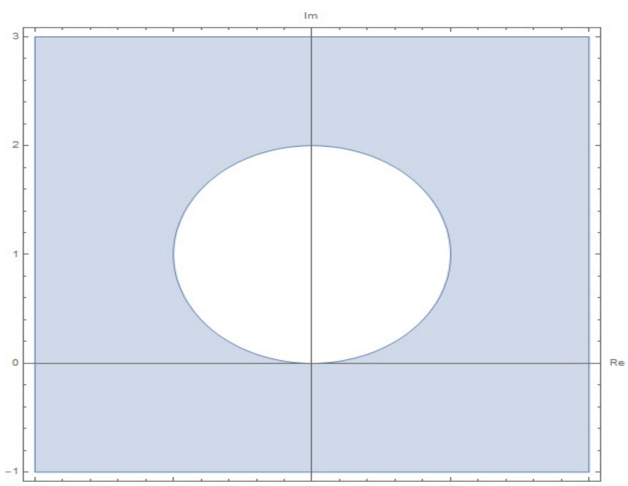


با در نظر گرفتن $z = x + iy$ و قرار دادن در رابطه بالا داریم:

$$\left|x + i(y-1)\right| < 1 \Rightarrow x^2 + \left(y-1\right)^2 < 1$$

داخل دایره ای به مرکز $(0,1)$ و به شعاع یک.

$4)\left|z - i\right| > 1$



در حالت کلی $r > 0, \left|z - z_0\right| < r$ داخل دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع r را نشان می‌دهد.

$5)\left|z - i\right| + \left|z + i\right| = 8$

با در نظر گرفتن $z = x + iy$ و قرار دادن در رابطه بالا داریم:

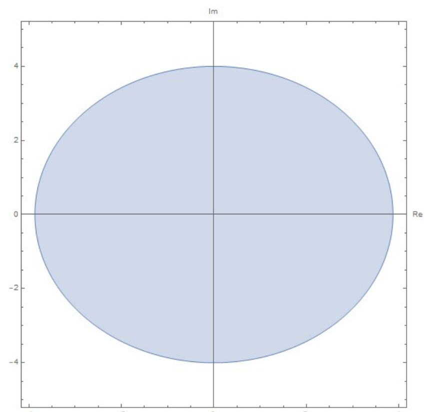
$$\left|x+i\left(y-1\right)\right|+\left|x+i\left(y+1\right)\right|=8$$

$$x^2+\left(y-1\right)^2=64+x^2+\left(y+1\right)^2-16\sqrt{\left(x^2+\left(y+1\right)^2\right)}\Rightarrow 64+4y=16\sqrt{\left(x^2+\left(y+1\right)^2\right)}$$

$$256+y^2+32y=16x^2+16\left(y+1\right)^2$$

$$16x^2+15y^2=240$$

بیضی ای به کانون $-i$ و i .



$$6)\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\leq 3$$

با در نظر گرفتن $z=x+iy$ و قرار دادن در رابطه بالا داریم:

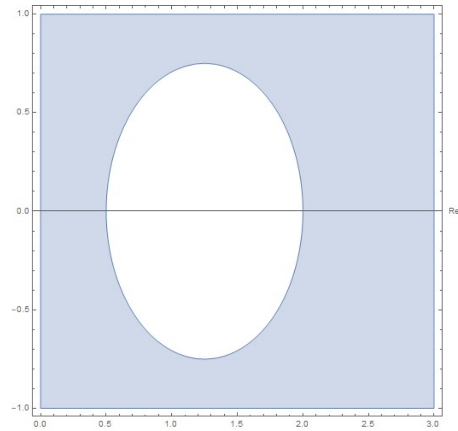
$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=\frac{\left|x+iy+1\right|}{\left|x+iy-1\right|}=\frac{\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}}\leq 3$$

$$\frac{\left(x+1\right)^2+y^2}{\left(x-1\right)^2+y^2}\leq 9\Rightarrow\left(x+1\right)^2+y^2\leq 9\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\Rightarrow x^2+2x+1+y^2\leq 9x^2-18x+9+9y^2$$

$$8x^2-20x+8y^2+9\geq 0\Rightarrow 8(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16})+8y^2+9-\frac{25}{2}\geq 0$$

$$(x-\frac{5}{4})^2+y^2\geq\frac{7}{16}$$

بیرون دایره ای به مرکز $\left(\frac{5}{4},1\right)$ و به شعاع $\frac{\sqrt{7}}{4}$ می‌باشد.



$7) -\dfrac{\pi}{3} < \arg(z) < \dfrac{2\pi}{3}$