امید ریاضی: اگر X یک متغیر تصادفی و $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال آن باشد، امید ریاضی X (میانگین X، مقدار مورد انتظار X) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} E[X] = \sum_{x \in S_X} x\, f_X(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد.} \\ E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد.} \end{cases}$$

در واقع امید ریاضی X معدل وزنی مقادیر ممکن X است که با تابع چگالی احتمال آن وزن دار شده است. تعبیر دیگر این است که اگر آزمایش تصادفی را به تعداد دفعات بالایی تکرار کنیم و از X معدل بگیریم مقدار حاصل باید به $E[X]$ نزدیک باشد.

تذکر: امید ریاضی متغیر تصادفی X را با نماد μ و یا μ_X نیز نمایش می‌دهند.

مثال: فرض کنید تاسی چنان طراحی شده است که احتمال رخ دادن هر عدد با آن عدد متناسب است. اگر X عدد حاصل از پرتاب تاس باشد، امید ریاضی X را بیابید.

x	1	2	3	4	5	6	
$f_X(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

$$\therefore \mu_X = E[X] = \sum_{x \in S_X} x\, f_X(x)$$

$$= 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + \cdots + 6 \times \frac{6}{21} = \frac{91}{21} = 4.33$$

مثال: نقطه‌ای را به تصادف از دایره‌ای به شعاع 2 انتخاب می‌کنیم. امید ریاضی متغیر تصادفی X، که در آن X فاصله این نقطه تا مرکز دایره است را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^2 x \left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.33$$

مثال: محموله‌ای مرکب از 12 دستگاه تلویزیون شامل دو تلویزیون معیوب است. اگر 3 دستگاه تلویزیون برای ارسال به هتلی انتخاب کنیم وجود چند دستگاه معیوب را می‌توان انتظار داشت؟

x	0	1	2	
$f_X(x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$	1

$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{10}{3}}{\binom{12}{3}}, \quad P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{10}{2}}{\binom{12}{3}}, \quad P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{10}{1}}{\binom{12}{3}}$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = 0 \times \frac{6}{11} + \frac{9}{22} + \frac{2}{22} = 1/2$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است. امید ریاضی X را به دست آورید:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)} & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\ln(2) - \ln(1) \right) = \frac{2}{\pi} \ln(2)$$

توجه کنید که لزوماً امید ریاضی یک متغیر تصادفی وجود ندارد:

مثال: فرض کنید X یک متغیر تصادفی به صورت زیر باشد:

x	2	2^2	2^3	$\dots$	2^k	$\dots$
$f_X(x)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$		$1/2^k$	$\dots$

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x f_X(x) = 2 \times 1/2 + 4 \times 1/4 + \dots + 2^k \times 1/2^k + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

قضیه: اگر X دارای چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی $Y = g(X)$ را می‌توان به کمک فرمول زیر محاسبه کرد:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} g(x) f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \end{cases}$$

مثال: اگر X دارای چگالی احتمال زیر باشد، امید ریاضی $e^{\frac{3}{4}X}$ را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$E[e^{\frac{3}{4}X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{3}{4}x} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{\frac{3x}{4}} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-1/4 x} dx = -4 e^{-1/4 x} \Big|_0^{\infty} = 0 + 4 = 4$$

نکته: به سادگی از خواص $\sum$ و $\int$ نتیجه می‌شود که

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

همچنین:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

تعریف: واریانس متغیر تصادفی X را با σ_X^2 نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)]^2$$

و انحراف معیار X را ریشه دوم مثبت واریانس تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

قضیه:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\begin{aligned}
E[(X-\mu)^2] &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2 \\
&= E[X^2] - E[X]^2
\end{aligned}$$

مثال: واریانس متغیر تصادفی X در مثال قبل را بیابید.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = (-x-1)e^{-x}\Big|_0^{\infty} = +1$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 2$$

	u	dv
$(+)$	x^2	e^{-x}
$(-)$	$2x$	$-e^{-x}$
$(+)$	2	e^{-x}
$(-)$	0	$-e^{-x}$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = 2 - 1^2 = \boxed{1}$$

مثال: تاسی را درنظر بگیرید که احتمال رخ دادن هر عدد با آن عدد متناسب است. اگر X عدد ظاهر شده بر روی تاس باشد، واریانس X را محاسبه کنید.

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x f_X(x) = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + \dots + 6 \times \frac{6}{21}$$

$$= \frac{91}{21} = 4.33$$

$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 f_X(x) = 1^2 \times \frac{1}{21} + 2^2 \times \frac{2}{21} + \dots + 6^2 \times \frac{6}{21}$$

$$= \frac{441}{21} = 21$$

* به سادگی می‌توان نشان داد:

$$Var[aX+b] = a^2 Var[X]$$

برای اثبات کافیست توجه کنیم که $E[aX+b] = a\mu_X + b$ لذا

$$Var[aX+b] = E[(aX+b-a\mu_X+b)^2]$$
$$= E[(aX-a\mu_X)^2] = E[a^2(X-\mu_X)^2]$$
$$= a^2 E[(X-\mu_X)^2] = a^2 Var[X]$$

* به همین ترتیب چون $\sigma_X = SD(X) = \sqrt{Var[X]}$

لذا

$$\sigma_{aX+b} = SD[aX+b] = \sqrt{a^2 Var[X]} = |a| SD[X]$$

با توجه به خواص بالا هرگاه به X مقدار ثابت b اضافه شود، تفاوتی در میزان پراکندگی

تابع چگالی احتمال در اطراف میانگین جدید، $\mu_x + b$ ایجاد می‌شود. همچنین با توجه

به خواص فوق اگر b عدد ثابتی باشد: $Var(b) = 0$

از طرفی اگر $Var[X] = 0$ باشد، در این صورت می‌توان نشان داد با احتمال 1،

X مقدار μ_x می‌گیرد: $P[X = \mu_x] = 1$

تذکر: همانطور که قبلاً دیدیم ممکن است امید ریاضی یک متغیر تصادفی بی‌نهایت شود،

و موجود نباشد، همین بحث در مورد واریانس نیز باید در نظر گرفته شود.

تعریف (متغیر تصادفی استاندارد): متغیر تصادفی X را استاندارد گوییم، هرگاه میانگین

X برابر صفر و واریانس آن برابر یک باشد.

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد به کمک تبدیل زیر به متغیر تصادفی

استاندارد تبدیل می‌گردد:

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$E[X^*] = \frac{1}{\sigma} E[X - \mu] = \frac{1}{\sigma} (E[X] - \mu) = 0$$

$$Var[X^*] = \frac{1}{\sigma^2} Var(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1$$

مثال: چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است، واریانس X را بیابید:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حل:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$$

$$= -(x^2+2x+2)\,e^{-x}\Big|_0^\infty$$

$$= 0-(-2) = 2$$

	u	dv
$+$	x^2	e^{-x}
$-$	$2x$	$-e^{-x}$
$+$	2	e^{-x}
$-$	0	$-e^{-x}$

$$E[X] = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx$$

$$= -(x+1)\,e^{-x}\Big|_0^\infty$$

$$= 0-(-1) = 1$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 2-(1)^2 = 1 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{Var} = 1$$

مثال: یک شرکت بیمه انواع اتومبیل ها را بیمه بدنه می کند. در طول یکسال 20 درصد افراد تصادف نمی کنند، 30 درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه 1000 دلار دارند، 40 درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه 10,000 دلار و 10 درصد افراد تصادفاتی با مجموع هزینه 100,000 دلار دارند. در این صورت اگر شرکت بیمه بخواهد برای بیمه بدنه، 150 دلار سود کند، چه قیمتی برای بیمه بدنه اتومبیل مناسب است؟

حل:

x	0	1000	10,000	100,000
$f_X(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

$$E[X] = 0\times 0.2 + 0.3\times 1000 + 0.4\times 10{,}000 + 0.1\times 100{,}000$$

$$= 300 + 4{,}000 + 10{,}000 = 14300$$

$$\text{قیمت} = 14300 + 150 = 14450 \text{ دلار}$$

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

اگر $E[X] = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار a و b را بیابید.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

$$\frac{3}{5} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

$$1 = \int_0^1 (a + bx^2)\,dx = ax + \frac{b}{3}x^3 \Big|_0^1 = a + \frac{b}{3}$$

$$\frac{3}{5} = \int_0^1 (ax + bx^3)\,dx = a\frac{x^2}{2} + \frac{b}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{3} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{5},\ b = \frac{6}{5}$$

مثال: شخصی می‌خواهد اتومبیل خود به قیمت 100,000 دلار را بیمه کند. شرکت بیمه تخمین می‌زند که کل مبلغ را با احتمال 0.002، نصف آن را با احتمال 0.01 و 0.25 آن را با احتمال 0.1 باید پرداخت کند. شرکت بیمه چه حق بیمه‌ای باید در نظر بگیرد تا سودی معادل 100 دلار داشته باشد.

گشتاورها :

تعریف : rامین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X، که با μ'_r یا m_r نمایش داده می‌شود، امید ریاضی X^r است ؛ داریم :

$$m_r=\mu'_r=E[X^r]=\begin{cases}\sum x^r f_X(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx\end{cases} \qquad r\geq 0$$

تعریف : گشتاور rام حول میانگین متغیر تصادفی X (گشتاور مرکزی) که با μ_r نمایش داده می‌شود، امید ریاضی $(X-\mu)^r$ است :

$$\mu_r=E[(X-\mu)^r]$$

$$\mu_1=E[X-\mu]=0,\quad \mu_2=E[(X-\mu)^2]=Var[X]$$

$$\mu'_1=\mu=E[X]$$

تابع مولد گشتاور: تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X را با $m_X(t)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

نکته:

$$m_X^{(k)}(0) = E[X^k]$$

$$\left[\quad e^{tX} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tX)^i}{i!} \Rightarrow E[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i E[X^i]}{i!} \right.$$

$$\left. \Rightarrow m_X^{(k)}(t) = E[X^k] \quad \right]$$

مثال: متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

می باشد. ابتدا تابع مولد گشتاور X را یافته و سپس به کمک آن $E[X^5]$ را بیابید.

$$m_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{-x/2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{2t-1}{2}\right)x} dx = \frac{1}{2} \frac{2}{2t-1} e^{\left(\frac{2t-1}{2}\right)x} \Big|_0^{\infty}$$

$$\overset{t<1/2}{=} -\frac{1}{2t-1} = \frac{1}{1-2t} = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \dots$$

$$E[X^5] = 2^5 \, 5! \qquad (?) \quad \text{چرا}$$

قضیه: گشتاور مرتبه k ام X حول مبدا برابر است با ضریب $\frac{t^k}{k!}$ در بسط تیلور تابع مولد گشتاور حول صفر، به عبارت دیگر:

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E[X^k] \frac{t^k}{k!}$$

امید ریاضی تابعی از دو متغیر تصادفی: فرض کنید X و Y، متغیرهای تصادفی با چگالی توام $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، در این صورت امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X,Y)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

ادامه در صفحه بعد

مثال: مقدار مورد انتظار $X+Y$ در مثال را به دست آورید.

$$E[X+Y] = \sum_{x\in S_X} \sum_{y \in S_Y} (x+y)\, f_{X,Y}(x,y)$$

$$= (0+0)\times \tfrac{1}{6} + (0+1)\times \frac{2}{9} + (0+2)\times\frac{1}{36}$$
$$+ (1+0)\times \tfrac{1}{3} + (1+1)\times\frac{1}{6} + (1+2)\times 0$$
$$+ (2+0)\times\frac{1}{12} + (2+1)\times 0 + (2+2)\times 0 = 1.11$$

تعریف (کوواریانس): کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y را با σ_{XY} ، $cov(X,Y)$ یا $C(X,Y)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_{XY} = cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$cov(X,Y)$ رابطه بین دو متغیر تصادفی X و Y را بیان می‌کند به طوری که اگر به طور متوسط با افزایش X، Y افزایش و یا با کاهش X، Y کاهش یابد، کوواریانس X و Y مثبت است. در این صورت به طور متوسط X و Y همجهت تغییر می‌کنند. در غیر این صورت کوواریانس منفی است. یعنی اگر به طور متوسط با افزایش یکی دیگری کاهش پیدا کند، یعنی به طور متوسط X و Y در خلاف جهت هم تغییر کنند.

قضیه:
$$cov[X,Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$

اثبات:
$$cov(X,Y)=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]=E[XY-X\mu_Y-\mu_X Y+\mu_X\mu_Y]$$

$$=E[XY]-\mu_Y E[X]-\mu_X E[Y]+\mu_X\mu_Y$$

$$=E[XY]-E[X]E[Y]$$

مثال: در مثال قبل کواریانس متغیرهای تصادفی X و Y را بیابید.

$$E[XY]=1\times 1/6=1/6 \qquad E[X]=0\times\frac{15}{36}+1\times 1/2+2\times 1/12=\frac{2}{3}$$

$$E[Y]=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{7}{18}+\frac{2}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=1/6-\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}=1/6-\frac{8}{27}=-0.1296$$

ویژگی های کواریانس:

1) $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

2) $cov(X,X)=Var(X)$

3) $cov(X,c)=0$ اگر c عددی ثابت باشد.

4) $cov(aX+b,cY+d)=ac\,cov(X,Y)$

5) $Var(aX+bY)=a^2Var[X]+b^2Var[Y]+2ab\,cov(X,Y)$ فرمول واریانس مجموع

اثبات 5:
$$Var(aX+bY)=E((aX+bY-a\mu_x-b\mu_y)^2)$$

$$=E[(a(X-\mu_X)+b(Y-\mu_Y))^2]$$

$$=E[a^2(X-\mu_X)^2+b^2(Y-\mu_Y)^2+2ab(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2ab\,cov(X,Y)$$

اثبات 4:

$cov(aX+b, cY+d)$

$= E[(aX+b-a\mu_X+b)(cY+d-c\mu_Y+d)$

$= E[a(X-\mu_X)\, c(Y-\mu_Y)] = ac\, cov(X,Y)$

6) $cov(aX_1+bX_2, Y) = a\, cov(X_1,Y) + b\, cov(X_2,Y)$

$cov(aX_1+bX_2,Y) = E[(aX_1+bX_2-a\mu_{X_1}-b\mu_{X_2})(Y-\mu_Y)]$

$= E[a(X_1-\mu_{X_1})(Y-\mu_Y)] + E[b(X_2-\mu_{X_2})(Y-\mu_Y)]$

$= a\, cov(X_1,Y) + b\, cov(X_2,Y)$

تعریف (ضریب همبستگی): ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y میزان رابطه خطی بین دو متغیر X، Y را اندازه گیری می‌کند.

خواص ضریب همبستگی:

1) $\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$

2) $-1 \le \rho \le 1$

3) $\rho = 0$ اگر X، Y مستقل باشند

4) اگر $Y = aX+b$، $a>0$، $\rho>0$.

5) اگر $Y = aX + b$ و $a < 0$ ، $\rho < 0$.

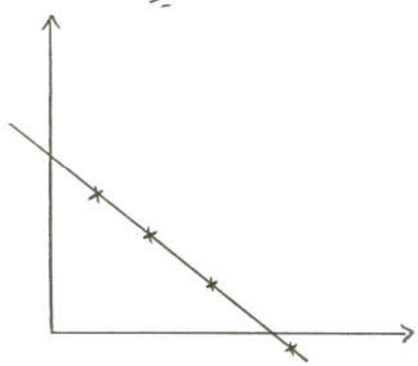
6) $\rho = \pm 1$ اگر و تنها اگر $\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \pm \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$

خاصیت یک بیان می‌کند که ضریب همبستگی X و Y به مبداء و واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی ندارد.

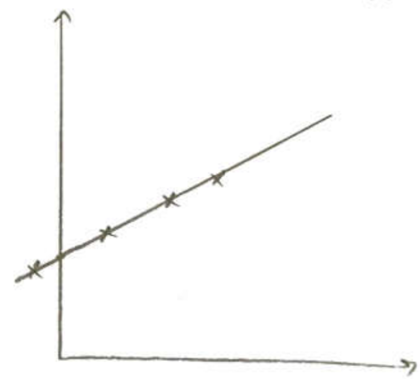
تذکر: عکس رابطه (3) برقرار نیست، یعنی $\rho = 0$ ایجاب نمی‌کند که X و Y مستقل باشند.

در واقع اگر $\rho = 0$ رابطه خطی بین X و Y برقرار نیست و آنها را ناهمبسته می‌نامیم.

تذکر: اگر $\rho = +1$ یا $\rho = -1$ داده‌های (X, Y) روی یک خط راست قرار می‌گیرند. اگر ρ به $+1$ یا -1 نزدیک باشند، داده‌های (X, Y) اطراف یک خط راست قرار می‌گیرند:



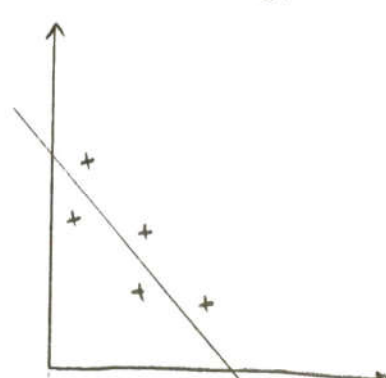
$\rho = -1$



$\rho = 1$

$\rho \simeq 0$

$0 < \rho < 1$



$-1 < \rho < 0$

مثال: فرض کنید میان X و Y رابطه زیر برقرار است، ضریب همبستگی آنها را بیابید.

$$(2X-1)(Y+1) = 2XY+3$$

حل:

$$2XY+2X-Y-1 = 2XY+3$$

$$2X-Y=4 \Rightarrow 2X = Y+4$$

لذا $\rho=1$ چون با افزایش Y، X نیز افزایش می‌یابد.

مثال: اگر $X+Y=1$ و $U=2X-Y$ و $V=X+2Y$. ضریب همبستگی U و V را بیابید.

$$\begin{cases} 2X-Y=U & (1) \\ X+2Y=V & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2\times(1)+(2)} 5X = 2U+V \Rightarrow X = \frac{2U+V}{5},$$

$$\xrightarrow{-2\times(2)+(1)} -5Y = -2V+U \Rightarrow Y = \frac{2V-U}{5}$$

$$X+Y=1 \Rightarrow U+3V=5 \Rightarrow U=-3V+5$$

پس $\rho(U,V)=-1$.

تذکر: اگر X و Y مستقل باشند، در این صورت $E[XY]=E[X]E[Y]$.

$$E[XY] = \sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y} xy\, f_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$= \Big(\sum_{x\in S_X} x\, f_X(x)\Big)\Big(\sum_{y\in S_Y} y\, f_Y(y)\Big)$$

$$= E[X]\,E[Y]$$

نتیجه: اگر X و Y مستقل باشند، $\rho(X,Y) = Cov(X,Y)=0$.

مثال: اگر چگالی توام متغیرهای تصادفی X و Y به صورت

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y) & 0<x<1,\ 1<y<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

امید $\frac{X}{Y^3}$ را بیابید.

حل:

$$E\left[\frac{X}{Y^3}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{y^3} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2\int_0^1 \frac{x}{y^3}\,\frac{2}{7}(x+2y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2\int_0^1 \frac{x^2}{y^3} + \frac{2x}{y^2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2 \frac{x^3}{3y^3} + \frac{x^2}{y^2}\Big|_{x=0}^{1} dy = \frac{2}{7}\int_1^2 \left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$= \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6y^2} - \frac{1}{y}\right)\Big|_{y=1}^{2} = \frac{2}{7}\left[\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{5}{28}$$

$E[X] = ?$

$$E[X] = \int_1^2\int_0^1 x\,\frac{2}{7}(x+2y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y\right)\Big|_{x=0}^{1} dy$$

$$= \frac{2}{7}\int_1^2 \left(\frac{1}{3} + y\right) dy = \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{2}$$

$$= \frac{2}{7}\left[\left(\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{11}{21}$$

مثال : کواریانس دو متغیر تصادفی X و Y که چگالی توام آنها به صورت

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & x>0, y>0, \quad x+y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

است را بیابید.

$$\mu_X = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2x \, dy \, dx = 1/3$$

$$\mu_Y = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2y \, dy \, dx = 1/3$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy \, dy \, dx$$

$$= 1/12$$

$$\Rightarrow \sigma_{XY} = \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36}$$