توزیع های پیوسته خاص:

توزیع یکنواخت:

متغیر تصادفی پیوسته X را یکنواخت روی بازه $[a,b]$ گوییم هر گاه چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & ow \end{cases}$$

در این صورت می‌نویسیم $X \sim U(a,b)$.

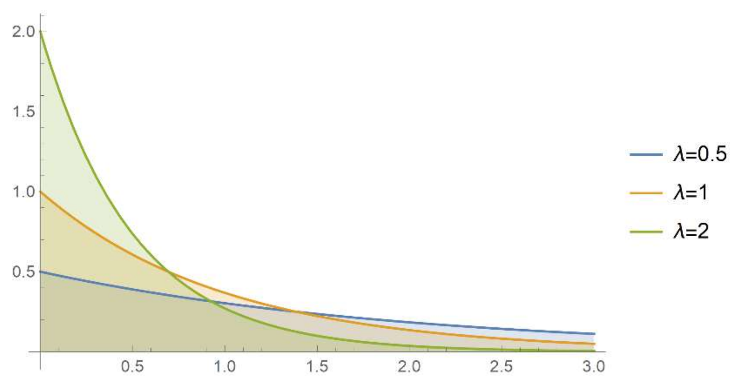
قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته یکنواخت باشد داریم:

$$E[X] = \frac{b+a}{2}, \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

توزیع نمایی:

تعریف: گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است هرگاه چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & ow \end{cases}$$



شکل 2 نمودار توزیع نمایی برای λ های مختلف

قضیه: اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد در این صورت:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

اثبات:

$$E[X]=\int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lambda\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=0-(-\frac{1}{\lambda})=\frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2]=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lambda\left(\frac{x^2}{\lambda}+\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=0-\left(-\frac{2}{\lambda^2}\right)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

کاربرد: معمولا از متغیر تصادفی نمایی برای طول عمر قطعات الکتریکی و ... استفاده می‌شود.

مثال: طول عمر یک قطعه الکتریکی به طور متوسط ۱۵۰ ساعت است. اگر طول عمر این قطعه الکتریکی از توزیع نمایی پیروی کند، احتمال اینکه این قطعه بیش از ۱۰۰ ساعت عمر کند چقدر است؟

$$\frac{1}{\lambda}=E[X]=150\Rightarrow\lambda=\frac{1}{150}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{150}e^{-\frac{1}{150}x} & x>0\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$P(X>100)=\int_{100}^\infty\frac{1}{150}e^{-\frac{1}{150}x}dx=-e^{-\frac{1}{150}x}\Big|_{100}^\infty=e^{-\frac{2}{3}}=0.5134$$

خاصیت بی حافظگی توزیع نمایی:

$$P(X>t+s\,|\,X>t)=\frac{P(X>t+s,X>t)}{P(X>t)}=\frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}=P(X>s)$$

این رابطه نشان می‌دهد که احتمال شرطی فوق به t بستگی ندارد. یعنی توزیع نمایی خاصیت بی حافظگی دارد.

مثال: فرض کنید طول عمر یک خازن از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=0.03$ پیروی می‌کند. اگر بدانیم این خازن ۱۵۰ ساعت کارکرده است، احتمال اینکه حداقل ۲۰ ساعت دیگر هم کار کند چقدر است؟

$$f_X(x)=\begin{cases}0.03e^{-0.03x} & x>0\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$P\left(X>150+20 \mid X>150\right)=P\left(X>20\right)$$

$$=\int_{20}^{\infty} 0.03e^{-0.03x}\,dx=-e^{-0.03x}\Big|_{20}^{\infty}=0.54$$

رابطه توزیع نمایی و توزیع پوآسون:

اگر در یک آزمایش تصادفی پوآسون در بازه T متوسط تعداد رویداد ها λ باشد. در این صورت مدت زمان انتظار برای رخ دادن اولین رویداد از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی می‌کند. همچنین مدت زمان انتظار بین دو رویداد متوالی نیز از توزیع نمایی پیروی می‌کند.

مثال: تعداد کشتی‌هایی که به یک بندر در ۲۴ ساعت مراجعه می‌کنند به طور متوسط ۶ عدد است.

الف) احتمال اینکه در ۸ ساعت ۳ کشتی به بندر مراجعه کند را بیابید.

ب) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین ورود کشتی دوم و سوم کمتر از ۳ ساعت باشد چقدر است؟

حل:

الف)

$$T=24 \quad \lambda=6$$
$$T=8 \quad \lambda=2$$
$$P\left(X=x\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$
$$P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}$$

ب)

$$T=24 \quad \lambda=6$$
$$T=3 \quad \lambda=\frac{6}{8}=0.75$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}0.75e^{-0.75y} & y>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$
$$P(Y\leq 1)=\int_{0}^{1} 0.75e^{-0.75y}\,dy=-e^{-0.75y}\Big|_{0}^{1}=e^{-0.75}$$

$$T = 24 \quad \lambda = 6$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6e^{-6y} & y > 0 \\ 0 & ow \end{cases}$$

$$P(Y \le \frac{1}{8}) = \int_0^{\frac{1}{8}} 6e^{-6y} dy = -e^{-6y} |_0^{1/8} = e^{-0.75}$$

توزیع گاما:

یادآوری (تابع گاما): تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \alpha > 0$$

می‌توان نشان داد تابع گاما در خواص زیر صدق می‌کند:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(n+1) = n!$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد، در این صورت X را یک متغیر تصادفی گاما می‌نامیم.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & ow \end{cases}$$

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی گاما باشد:

$$E[X] = \alpha\beta \quad Var[X] = \alpha\beta^2 \quad M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$$

تذکر: توجه کنید که اگر $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{1}{\lambda}$ توزیع گاما به توزیع نمایی تبدیل می‌شود.

توزیع خی دو:

حالت خاص دیگری از توزیع گاما توزیع خی دو نام دارد . گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع خی دو با n درجه آزادی است هرگاه در توزیع گاما $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\beta = 2$ در نظر گرفته شوند، در این صورت:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & ow\end{cases}$$

نتیجه: اگر X یک متغیر تصادفی خی دو با n درجه آزادی باشد در این صورت:

$$E[X]=n \quad Var[X]=2n \quad M_X(t)=\left(1-2t\right)^{-\frac{n}{2}}$$

رابطه دیگر بین توزیع نمایی و گاما:

اگر $X_1,X_2,...,X_n$ متغیر های تصادفی نمایی و مستقل از هم باشند در این صورت مجموع آنها یعنی

$$S_n=X_1+X_2+...+X_n$$

دارای توزیع گاما با پارامتر های $\alpha=n$ و $\beta=\dfrac{1}{\lambda}$ می‌باشد.

مثال: فرض کنید تعداد بازدید کنندگانی که وارد یک موزه می‌شوند از توزیع پوآسون پیروی کنند و به طور متوسط در هر ساعت از این موزه ۱۰ نفر بازدید می‌کنند. احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین زمان ورود ۱۲ امین بازدید کننده و پانزدهمین بازدید کننده کمتر از ۳۰ دقیقه باشد چقدر است؟

حل:

$$Y=X_{13}+X_{14}+X_{15}$$

در اینجا X_i را زمان انتظار بین ورود i امین و i+1 امین بازدید کننده تعریف کردیم. X_i ها دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=10$ هستند. لذا Y دارای توزیع گاما با پارامتر های $\alpha=3$ و $\beta=\dfrac{1}{10}$ است. پس

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{10^3}{2!}y^2e^{-10y} & y>0\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$P(Y \le \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 500y^2 e^{-10y} dy \begin{bmatrix} z = 10y \Rightarrow y = \frac{1}{10}z \\ dy = \frac{1}{10}dz \end{bmatrix}$$

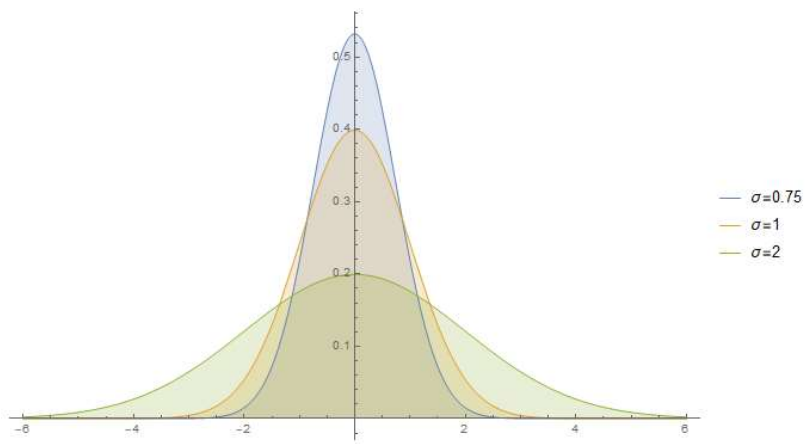
$$= 0.5\int_0^5 z^2 e^{-z} dz = -0.5\left(z^2 + 2z + 2\right)e^{-z} |_0^5 = 0.875$$

توزیع نرمال:

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی نرمال گوییم هر گاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

در اینجا μ و σ^2 پارامترهای توزیع هستند که در واقع μ میانگین و σ^2 واریانس جامعه است.



شکل 3نمودار متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس های مختلف

نماد گذاری : اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد می‌نویسیم:

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

با توجه به تعریف فوق تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال به صورت زیر است:

$$F_X(x) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

همانطورکه مشاهده می‌شود انتگرال فوق جواب صریح و فرم بسته ندارد. لذا به صورت تحلیلی نمی‌توان آنرا محاسبه کرد و احتمال های مربوطه را به دست آورد بلکه می‌توان به‌کمک روش های عددی این انتگرال را محاسبه نمود. در

عمل برای محاسبه احتمالات مربوط به متغیر تصادفی نرمال ابتدا آنرا استاندارد کرده و سپس از جداول آماری مربوطه استفاده می‌کنیم.

تعریف: یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس یک را متغیر تصادفی نرمال استاندارد گوییم و با $Z \sim N(0,1)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت:

$$\Phi(z) = P\left(Z \le z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

برای محاسبه احتمالات مربوط به متغیر تصادفی نرمال استاندارد از جدول آماری مربوطه برای تابع $\Phi(z)$ کمک می‌گیریم. این احتمالات باید حتما به صورت $P\left(Z \le z\right)$ باشند و یا به این فرم تبدیل شوند:

$$\begin{aligned}
&P\left(Z \le z\right) = \Phi\left(z\right) \\
&P\left(Z \ge z\right) = 1 - P\left(Z \le z\right) = 1 - \Phi\left(z\right) \\
&P\left(a \le z \le b\right) = P\left(Z \le b\right) - P\left(Z \le a\right) = \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)
\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}
&P\left(Z \le 1.23\right) = 0.8907 \\
&P(Z \le 2.46) = 0.9931 \\
&P(Z \le -0.75) = 0.2266 \\
&P\left(Z \ge 1.23\right) = 1 - P\left(Z \le 1.23\right) = 1 - 0.8907 = 0.11 \\
&P(Z \ge -0.75) = 1 - P(Z \le -0.75) = 1 - 0.2266 = 0.7734 \\
&P\left(0.2 \le Z \le 1\right) = P\left(Z \le 1\right) - P\left(Z \le 0.2\right) = 0.84133 - 0.5793 = 0.26203
\end{aligned}$$

اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، در این صورت ابتدا با تغییر متغیر $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ آنرا استاندارد می‌کنیم و سپس به حل مسئله می‌پردازیم:

مثال: قد دانشجویان یک کلاس از توزیع نرمال با میانگین ۱۷۱ و واریانس ۶۴ پیروی می‌کند. احتمال اینکه قد یک دانشجو بیش از ۱۷۵ باشد چقدر است؟ احتمال اینکه کمتر از ۱۶۸ باشد چقدر است؟ احتمال اینکه بین ۱۷۴ و ۱۶۸ باشد چقدر است؟

حل:

$$\mu=171 \quad \sigma^2=64 \Rightarrow \sigma=8$$
$$X \sim N(171,64)$$
$$P(X>175)=?$$
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-171}{8}$$
$$P(X>175)=P(\frac{X-171}{8}>\frac{175-171}{8})=P(Z>.5)=1-P(Z\leq 0.5)=1-0.6915=0.31$$
$$P(X<168)=P\left(\frac{X-171}{8}<\frac{168-171}{8}\right)=P(Z<-0.375)=0.3557$$

تمرین: وزن جعبه هایی که توسط یک کارگاه تولید میشود از توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ و واریانس ۳۶ پیروی می‌کند. احتمال اینکه وزن یک جعبه ساخته شده توسط این کارگاه وزنی بیش از ۱۰۳ داشته باشد چقدر است؟ احتمال اینکه وزن یک جعبه ساخته شده توسط این کارگاه وزنی کمتر از ۹۵ داشته باشد چقدر است؟

مثال: نمره دانشجویان یک کلاس دارای توزیع نرمال با میانگین ۶۴ و واریانس ۱۰۰ است. معلم این کلاس می‌خواهد ۸۰ درصد این دانشجویان در درس مورد نظر قبول شوند. این معلم چه نمره ای را برای نمره قبولی در نظر بگیرد؟

حل: فرض کنید نمره قبولی a اشد:

$$P(X>a)=0.8$$
$$X \sim N(64,100)$$
$$Z=\frac{X-64}{10}$$
$$0.8=P(X>a)=P\left(\frac{X-64}{10}>\frac{a-64}{10}\right)=P\left(Z>\frac{a-64}{10}\right)$$
$$P\left(Z<\frac{a-64}{10}\right)=1-P\left(Z>\frac{a-64}{10}\right)=0.2$$
$$\frac{a-64}{10}=-0.84 \Rightarrow a-64=-8.4 \Rightarrow a=55.6$$

تمرین: در مثال قبل اگر این کلاس ۱۰۰ دانشجو داشته باشد تقریبا چند نفر از دانشجویان نمره ای بیش از ۸۰ گرفته‌اند؟

نکته: اگر $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ در این صورت $aX+b$ نیز متغیری **نرمال** با میانگین $a\mu+b$ و واریانس $a^2\sigma^2$ است.

نکته: اگر متغیر های تصادفی $X_1,X_2,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی نرمال و ***مستقل*** باشند و $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$، در این صورت هر ترکیب خطی از آنها مانند

$$Y=b_1X_1+b_2X_2+\ldots+b_nX_n$$

نیز یک متغیر تصادفی نرمال است و داریم:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \mu_i , \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sigma_i^2 ,\right)$$

مثال: اگر نمرات درس دانشجویان در یک درس سه واحدی از توزیع نرمال با میانگین ۶۴ و واریانس ۱۰۰ و نمرات دانشجویان در یک درس دو واحدی از توزیع نرمال با میانگین ۵۵ و واریانس ۳۶ پیروی کند و دانشجویی به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد میانگین نمره او در این دو درس کمتر از ۶۰ باشد. (فرض کنید نمره دانشجو در دو درس از هم مستقل است)

حل:

$$\begin{aligned}
&X_1 \sim N(64,100)\\
&X_2 \sim N(55,36)\\
&Y = \frac{3X_1 + 2X_2}{5} \sim N\left(\frac{3\times 64 + 2\times 55}{5}, \frac{9}{25}\times 100 + \frac{4}{25}\times 36\right)\\
&Y \sim N(60.4, 28.8)\\
&Z = \frac{Y - 60.4}{5.36}\\
&P(Y < 60) = P\left(\frac{Y - 60.4}{5.36} \le \frac{60 - 60.4}{5.36}\right) = P(Z \le -0.74) = 0.4721
\end{aligned}$$

تقریب توزیع دو جمله ای با توزیع نرمال:

با توجه به قضیه دموآورـ لاپلاس اگر پارامتر n در توزیع دوجمله ای به اندازه کافی بزرگ باشد می‌توان توزیع دوجمله ای را با توزیع نرمال با پارامترهای مشابه $\mu = np$ و $\sigma^2 = npq$ تقریب زد. در عمل برای اینکه این تقریب مناسب باشد باید $npq > 10$. برای به کارگیری توزیع نرمال جهت تقریب توزیع دوجمله ای با توجه به اینکه توزیع دوجمله ای یک توزیع گسسته و توزیع نرمال یک توزیع پیوسته است،

$$P(X = i) = P\left(i - \frac{1}{2} < X < i + \frac{1}{2}\right)$$

مثال: فرض کنید یک سکه نا اریب را ۶۰ بار پرتاب کرده ایم. اگر X تعداد دفعاتی باشد که این سکه شیر ظاهر می‌شود، احتمال $X = 20$ را به کمک توزیع نرمال تقریب بزنید. سپس $P(X > 25)$ را تقریب بزنید.

$$n = 60$$
$$p = \frac{1}{2}, q = 1 - p = \frac{1}{2}$$
$$np = 30$$
$$npq = 60\frac{1}{4} = 15$$
$$X \sim N(30, 15)$$
$$Z = \frac{X - 30}{\sqrt{15}}$$
$$P(X = 20) = P(19.5 \le X \le 20.5) = P\left(\frac{19.5 - 30}{\sqrt{15}} \le \frac{X - 30}{\sqrt{15}} \le \frac{20.5 - 30}{\sqrt{15}}\right)$$
$$= P(-2.71 \le Z \le -2.45) = P(Z \le -2.45) - P(Z \le -2.71) = 0.0071 - 0.0030 = 0.0037$$

برای قسمت دوم سوال داریم:

$$P(X > 25.5) = P\left(\frac{X - 30}{\sqrt{15}} > \frac{25.5 - 30}{\sqrt{15}}\right) = P(Z > -1.1619) = 1 - 0.12 = 0.88$$

تمرین: در شهری معین ۰/۱ رانندگان در هر سال درگیر تصادفات اتوموبیل می‌شوند. احتمال اینکه از بین ۱۵۰ راننده :

الف) تنها ۱۰ نفر در سال

ب) حداکثر ۳۰ نفر تصادف داشته باشند چقدر است؟

تقریب توزیع پوآسون با توزیع نرمال:

اگر پارامتر λ در توزیع پوآسون به اندازه‌کافی بزرگ باشد $(\lambda > 5)$ می‌توان توزیع پوآسون را با توزیع نرمال با پارامترهای مشابه $\mu = \lambda$ و $\sigma^2 = \lambda$ تقریب زد.

مثال: تعداد مشتریانی‌که در یک ساعت به طور متوسط وارد یک فروشگاه می‌شوند، به طور متوسط ۲۰ نفر است. احتمال اینکه تعداد مشتریان وارد شده به این فروشگاه در یک ساعت بین ۱۵ تا ۲۲ نفر باشد را بیابید.

حل:

$$\lambda = 20$$
$$X \sim N(20,20)$$
$$Z = \frac{X-20}{\sqrt{20}}$$
$$P(14.5 \le X \le 22.5) = P\left(\frac{14.5-20}{\sqrt{20}} \le \frac{X-20}{\sqrt{20}} \le \frac{22.5-20}{\sqrt{20}}\right) = P(-1.23 \le Z \le 0.55)$$
$$= P(Z \le 0.55) - P(Z \le -1.23) = 0.7088 - 0.1093 = 0.6$$

توزیع بتا:

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی بتا گوییم هرگاه چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

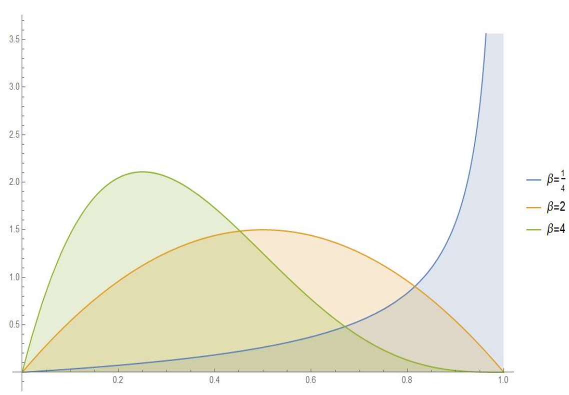
که در اینجا $\alpha, \beta > 0$ و $B(a,b)$ تابع بتاست که به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

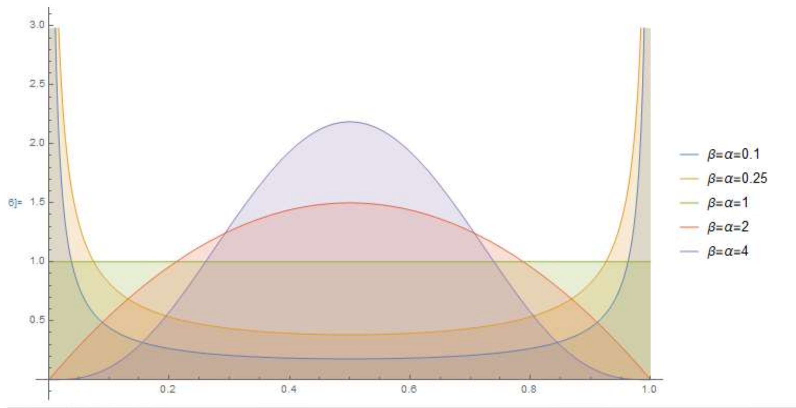
قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی بتا باشد، در این صورت:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

تذکر: توزیع یکنواخت حالت خاصی از توزیع بتا می باشد که $\alpha = 1, \beta = 1$. اگر $\alpha > \beta$ مقادیر نزدیکتر به یک شانس بیشتری برای رخ دادن پیدا می‌کنند، و اگر $\alpha < \beta$ مقادیر نزدیکتر به صفر شانس بیشتری برای رخ دادن پیدا می‌کنند.



شکل 4 نمودار توزیع بتا برای $\alpha = 2$



شکل 5نمودار چگالی توزیع بتا، وقتی‌که $\alpha = \beta$

نکته: رابطه بین تابع گاما و بتا

$$B\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}$$

تهیه و تنظیم: امیرحسین سبحانی_ دانشکده ریاضی دانشگاه سمنان