قضیه: اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، در این صورت Z^2 دارای توزیع خی دو با یک درجه آزادی است.

اثبات: ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی $X = Z^2$ را پیدا می‌کنیم:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(Z^2 \le x)$$
$$= P(-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x})$$
$$= \Phi_Z(\sqrt{x}) - \Phi_Z(-\sqrt{x})$$

[یادآوری:

$$\Phi_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

[

$$f_X(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x/2} = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} x^{-1/2} e^{-x/2} \quad x > 0$$

که همان توزیع خی دو با یک درجه آزادی است. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

قضیه: فرض کنید $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد و مستقل باشند. اگر $Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ در این صورت Y از توزیع خی دو با n درجه آزادی پیروی می‌کند، یعنی:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \qquad y > 0$$

اثبات: چون Z_i ها متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند، بنابراین Z_i^2 ها از توزیع خی دو با یک درجه آزادی هستند. از طرفی Z_i^2 ها مستقل می‌باشند پس داریم:

$$M_Y(t) = M_{Z_1^2}(t) \cdots M_{Z_n^2}(t)$$

از طرفی تابع مولد گشتاور Z_i^2 برابر است با:

$$M_{Z_i^2}(t) = (1-2t)^{-1/2}$$

بنابراین:

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

که تابع مولد گشتاور توزیع گاما با $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\beta = 2$ است که همان توزیع خی دو با n درجه آزادی است.

در حالت کلی قضیه زیر را داریم که با استدلالی مشابه اثبات می‌شود.

قضیه: اگر $X \sim \chi^2(n)$ و $Y \sim \chi^2(m)$ در این صورت اگر X و Y از هم مستقل باشند،

$$X + Y \sim \chi^2(m+n)$$

قضیه: اگر $\bar{X}$ و S^2 میانگین و واریانس نمونه‌ای تصادفی به حجم n از جامعه نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، آنگاه

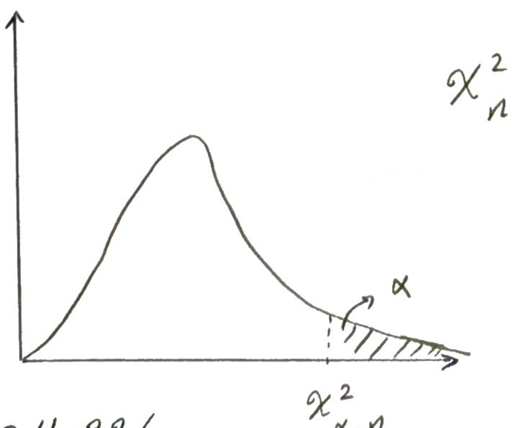
1) $\bar{X}$ و S^2 مستقل هستند.

2) متغیر تصادفی $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع خی دو با $n-1$ درجه آزادی است.

تعریف: فرض کنید $X \sim \chi^2_n$. در این صورت $\chi^2_{\alpha,n}$ مقداری تعریف می‌شود که

$$P(X \geqslant \chi^2_{\alpha,n}) = \alpha$$

مقادیر $\chi^2_{\alpha,n}$ را به ازای αهای مختلف می‌توان در جدول آماری مربوط به توزیع χ^2 یافت.



$\chi^2_{0.05,15} = 24.996$

$\chi^2_{0.99,24} = 10.875$

مثال: وزن قطعاتی که توسط یک دستگاه ساخته می‌شود، از توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ و واریانس 225 پیروی می‌کند. اگر یک نمونه تصادفی 8 تایی از این قطعات در نظر بگیریم، احتمال اینکه مقدار واریانس نمونه‌ای کمتر از 386.036 شود چقدر است؟

$$X_i \sim N(100, 225)$$

$$n = 8$$

$$P(S^2 \leq 386.036) = ?$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow \frac{7S^2}{225} \sim \chi^2_7$$

$$P(S^2 \leq 386.036) = P\left(\frac{7S^2}{225} \leq \frac{7 \times 386.036}{225}\right)$$

$$= P(\chi^2_7 \leq 12.01) = P(\chi^2_7 \leq \chi^2_{0.1,7})$$

$$= 1 - 0.1 = 0.9$$

مثال: فرض کنید $X_1 \sim N(10,16)$ و $X_2 \sim N(5,25)$ و X_1 و X_2 مستقل باشند. در این صورت مطلوبست:

$$P(25(X_1-10)^2 + 16(X_2-5)^2 \leq 50)$$

حل:

$$P(25(X_1-10)^2 + 16(X_2-5)^2 \leq 50)$$

$$= P\left(\frac{25(X_1-10)^2}{400} + \frac{16(X_2-5)^2}{400} \leq \frac{50}{400}\right)$$

$$= P\left(\frac{(X_1-10)^2}{16} + \frac{(X_2-5)^2}{25} \leq 1/8\right) = P(Z_1^2 + Z_2^2 \leq 1/8)$$

چون Z_1^2 و Z_2^2 از هم مستقل هستند، پس $X = Z_1^2 + Z_2^2 \sim \chi^2_2$ لذا باید $P(X \leq 1/8)$ را محاسبه کنیم:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^1 \Gamma(1)} x^0 e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

که در واقع همان توزیع نمایی است.

$$P(X \leq 1/8) = \int_0^{1/8} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = -e^{-x/2}\Big|_0^{1/8}$$

$$= 1 - e^{-1/16}$$

توزیع t :

قضیه: اگر Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل باشند، $Y \sim \chi^2_n$ و Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، در این صورت متغیر تصادفی

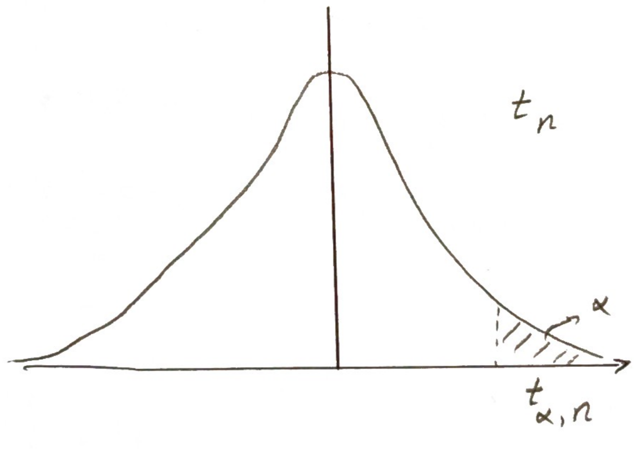
$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

دارای چگالی زیر است

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty$$

و آن را توزیع t با n درجه آزادی می نامند.

همانطور که در شکل زیر دیده می شود، توزیع t_استیودنت کاملاً" متقارن است



قضیه: اگر T یک متغیر تصادفی با توزیع t_استیودنت و n درجه آزادی باشد:

$$E[T] = 0, \quad Var[T] = \frac{n}{n-2}$$

تعریف: فرض کنید $T \sim t_n$، در این صورت $t_{\alpha,n}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(T \geq t_{\alpha,n}) = \alpha$$

مقادیر مربوط به $t_{\alpha,n}$ را می توان به کمک جدول آماری مربوطه به دست آورد.

$t_{0.1,15} = 1.341 \qquad t_{0.05,25} = 1.708$

تذکر: وقتی درجه آزادی توزیع t به سمت ∞ میل کند، این توزیع به توزیع نرمال استاندارد همگرا می شود. در عمل وقتی $n>30$، توزیع t را با توزیع نرمال استاندارد تقریب می زنیم.

تذکر: با توجه به تقارن توزیع t، داریم: $t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$

$$t_{0.9,15} = -t_{0.1,15} = -1.341$$

قضیه: اگر $\bar{X}$ و S^2 میانگین و واریانس نمونه ای تصادفی به حجم n از جامعه نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، در این صورت

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

اثبات: با توجه به قضایای قبلی

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \qquad Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

لذا باید

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

اما:

$$T = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

مثال: قد دانشجویان یک کلاس از توزیع نرمال با میانگین ۱۷۰ پیروی می‌کند.
اگر از این کلاس یک نمونه تصادفی 25 نفره انتخاب کنیم و انحراف معیار نمونه‌ای
به دست آمده برابر 5 باشد، احتمال اینکه میانگین قد این افراد کمتر از 169
باشد، چقدر است؟

$$X_i \sim N(170, \sigma^2) \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{24}$$

$$S = 5$$

$$P(\bar{X} < 168)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-170}{\frac{S}{\sqrt{25}}} < \frac{168-170}{\frac{5}{\sqrt{25}}}\right) = P(t_{24} < -1)$$

$$= 0.16$$

تمرین: اگر X و Y مستقل، X دارای توزیع نرمال با میانگین 5 و واریانس 2 باشد و
Y دارای توزیع خی دو با 4 درجه آزادی باشد، مطلوبست $P(X-5 < 4.6\sqrt{Y})$.