آزمون فرض :

گاهی با مسائلی روبه‌رو هستیم که باید از بین دو ادعا در مورد پارامتر جامعه یکی را بپذیریم. این ادعاها را فرض گفته و فرآیند تصمیم‌گیری در مورد صحت آن را آزمون فرض می‌گوییم.

تعریف : هر گزاره یا ادعایی درباره تابع احتمال یک جامعه و پارامترهای آن را یک فرض آماری می‌گوییم.

تعریف : فرآیند تصمیم‌گیری در مورد پذیرش یا رد یک فرض آماری براساس نمونه تصادفی انتخاب شده را آزمون فرض آماری می‌گوییم.

در آزمون فرض یکی از فرض‌ها را فرض خنثی یا فرض صفر نامیده و با H_0 نمایش می‌دهند و در صورت رد فرض H_0 فرض دیگری را می‌پذیریم که آن را فرض مقابل نامیده و با H_1 نمایش می‌دهیم.

تذکر: تصمیم‌گیری در مورد این که فرض مقابل به چه شکلی در نظر گرفته شود اهمیت زیادی داشته و معمولاً به صورت مسئله بستگی دارد.

درحالت کلی در آزمون فرض با چهار حالت مواجه هستیم:

1- H_0 را می‌پذیریم در صورتی که واقعاً صحیح است. (تصمیم درست)

2- H_0 را رد می‌کنیم درصورتی که واقعاً صحیح است. (تصمیم نادرست)

3- H_0 را می‌پذیریم درصورتی که واقعاً صحیح نیست. (تصمیم نادرست)

4- H_0 را رد می‌کنیم در صورتی که واقعاً صحیح نیست. (تصمیم درست)

همانطور که مشاهده می‌شود حالت‌های دو و سه نوعی خطا در تصمیم‌گیری هستند.

تعریف: رد فرض H_0 وقتی که واقعاً صحیح است را خطای نوع اول گویند و احتمال خطای نوع اول را با α نمایش می‌دهند. α را سطح معنی‌دار بودن آزمون می‌گوییم.

$\alpha = P($ درست باشد H_0 | رد H_0 $)$

تعریف: قبول فرض H_0 را وقتی واقعاً صحیح نیست، خطای نوع دوم گویند و احتمال خطای نوع دوم را با β نمایش می دهند:

$\beta = P($ صحیح نباشد H_0 | قبول H_0 $)$

تعریف: به آماره $T' = T'(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ که براساس مقادیر مشاهده شده آن تصمیم به رد یا پذیرش یک فرض می گیریم آماره آزمون گویند و به مجموعه مقادیری از این آماره، که براساس آن فرض H_0 رد می شود، ناحیه بحرانی یا رد آزمون می گوییم و با نماد C نمایش می دهیم. به متمم ناحیه بحرانی، C'، ناحیه پذیرش آزمون یا ناحیه قبول می گوییم.

تعریف (فرض ساده و مرکب): اگر فرض آماری توزیع احتمال جامعه را کاملاً مشخص سازد فرض را فرض ساده، و در غیر این صورت مرکب می گوییم.

مثلاً فرض $\mu = 50$ فرض ساده، و فرض $\mu > 50$ فرضی مرکب است.

تعریف (آزمون یک طرفه و دو طرفه) براساس اینکه فرض مقابل H_1 یک طرفه و یا دو طرفه باشد آزمون را یک طرفه یا دو طرفه می نامیم:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \geq \theta_0 \end{cases}$$

(آزمون یک طرفه)

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

(آزمون یک طرفه)

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

(آزمون دو طرفه)

مراحل انجام آزمون فرض:

۱- تعیین فرض H_0 و H_1.

2- تعیین سطح معنی دار بودن آزمون (α) که معمولاً 0.01، 0.05، ... است.

3- تعیین آماره آزمون T، که معمولاً از برآوردگر نقطه ای پارامتر مجهول θ به دست می آید.

4- تعیین ناحیه بحرانی آزمون که بر اساس H_1، آماره آزمون و سطح معنی دار بودن آزمون تعیین می شود.

5- محاسبه مقدار آماره آزمون بر اساس مقادیر نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$.

6- تصمیم گیری: اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی باشد H_0 رد و در غیر این صورت H_1 پذیرفته می شود.

آزمون فرض برای میانگین جامعه نرمال μ با واریانس معلوم

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه ای نرمال با میانگین μ و واریانس معلوم σ^2 باشد. در حالت کلی سه آزمون فرض زیر را در نظر می گیریم:

1) $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود، اگر $\bar{X} > C$

2) $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود، اگر $\bar{X} < C$

3) $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $\bar{X} < C_1$ یا $\bar{X} > C_2$

در حالت اول گفتیم که فرض H_0 زمانی رد می شود که $\bar{X} > c$. برای تعیین مقدار c از احتمال خطای نوع اول استفاده می کنیم:

$$\alpha = P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0)$$

امّا با توجه به شرط نرمال بودن جامعه (یا داشتن نمونه با حجم بیش از 30) داریم:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

لذا:

$$\alpha = P(\bar{X} > c \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \Rightarrow \frac{c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_\alpha \Rightarrow c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha + \mu_0$$

پس اگر $\bar{x} > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha + \mu_0$ فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود، یا به طور معادل اگر

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_\alpha .$$

در حالت دوم گفتیم که فرض H_0 زمانی رد می شود که $\bar{X} < c$ لذا داریم:

$$\alpha = P(\bar{X} < c \mid \mu = \mu_0) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -Z_\alpha \Rightarrow c = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_\alpha$$

لذا در این حالت فرض H_0 رد می شود اگر

$$\frac{c - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_\alpha$$

حالت سوم: در این حالت فرض H_0 زمانی رد می‌شود که $\bar{X} < C_1$ یا $\bar{X} > C_2$

$$\alpha = P(\bar{X} < C_1 \vee \bar{X} > C_2 \mid \mu = \mu_0) \Rightarrow 1-\alpha = P(C_1 < \bar{X} < C_2 \mid \mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{C_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{C_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\underbrace{\frac{C_1-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{-Z_{\alpha/2}} < Z < \underbrace{\frac{C_2-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{Z_{\alpha/2}}\right)$$

لذا فرض H_0 رد می‌شود اگر

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{\alpha/2} \quad \text{یا} \quad \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{\alpha/2}$$

مثال: توان شکنندگی کابل‌هایی که توسط یک کارخانه تولید می‌شوند، دارای میانگین 1800 و انحراف معیار 100 است. محققان شرکت با اعمال تکنیک جدیدی مدعی شده‌اند توان شکنندگی افزایش یافته است. برای آزمون این ادعا یک نمونه 50 تایی از کابل‌ها مورد آزمایش قرار گرفته‌اند و میانگین توان شکنندگی 1850 بدست آمده است. آیا در سطح معنی‌دار 0.01 این ادعا پذیرفته است؟

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1800 \\ H_1: \mu > 1800 \end{cases}$$

$$\sigma = 100, \quad n = 50, \quad \bar{x} = 1850, \quad \alpha = 0.01, \quad Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$

آماره آزمون $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ و ناحیه بحرانی به‌صورت

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_\alpha$$

مقدار آماره آزمون را بدست می‌آوریم:

$$Z = \frac{1850-1800}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = 3.55 > 2.33 = Z_{0.01}$$

لذا در سطح معنی دار ۰.۰۱ فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

مثال: عمر متوسط ۱۰۰ عدد از لامپ های تولید شده توسط یک کارخانه برابر ۱۵۷۰ ساعت به دست آمده است. کارخانه ادعا می کند متوسط عمر لامپ های تولیدی برابر 1600 ساعت است، در حالی که مصرف کنندگان این ادعا را قبول ندارند. اگر انحراف معیار طول عمر لامپ های تولیدی 120 ساعت باشد، صحت ادعای کارخانه را در سطح $\alpha=0.05$ و $\alpha=0.01$ بررسی کنید.

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases} \qquad z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1570-1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.5$$

فرض H_0 را رد می کنیم اگر $|z| > z_{\alpha/2}$. در سطح معنی دار 0.05 داریم:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{0.025} = 1.96$$

چون $|z| = 2.5 > 1.96$ در سطح معنی دار 0.05 فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

امّا در سطح معنی دار 0.01 داریم:

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow z_{0.005} = 2.58$$

و $|z| = 2.5 < 2.58$ لذا فرض H_0 را پذیرفته و H_1 را رد می کنیم.

آزمون فرض برای میانگین جامعه نرمال μ با واریانس نامعلوم :

در این بخش آماره آزمون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

با توجه به مباحث مطرح شده، در بخش قبل نواحی بحرانی برای آزمون‌های مختلف به صورت زیر هستند .

1) $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ $\quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha, n-1}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر

2) $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$ $\quad \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < -t_{\alpha, n-1}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر

3) $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ $\quad \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > t_{\alpha/2, n-1}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر

مثال : هزینه ساخت 10 قطعه در یک کارگاه به صورت زیر است :

1, 3, 4, 2, 5, 6, 5, 8, 9, 1

اگر هزینه ساخت قطعات از توزیع نرمال پیروی کند، آیا در سطح معنی دار $\alpha = 0.01$ می‌توان گفت $\underbrace{\text{هزینه}}_{\text{میانگین}}$ تولید قطعات 4 است؟ یا بیش از 4 است؟

$\begin{cases} H_0 : \mu = 4 \\ H_1 : \mu > 4 \end{cases}$ $\quad \bar{x} = 4.4 \; , \; s^2 = 7.6 \; , \; s = \sqrt{7.6} = 2.75$

مقدار آماره آزمون برابر $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ است، پس

$$t = \frac{4.4-4}{\frac{2.757}{\sqrt{10}}} = 0.46$$

لذا چون $t_{0.01,9} = 2.82$ و $t = 0.46 < 2.82$ فرض H_0 پذیرفته و H_1 رد می‌شود.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین دو جامعه نرمال با واریانس‌های معلوم

فرض کنید $X_1, \ldots, X_{n_1}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_1 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 و همچنین $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ یک نمونه تصادفی به حجم n_2 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 باشد. در این صورت در مورد اختلاف میانگین‌های $\mu_1 - \mu_2$ سه آزمون فرض زیر را می‌توانیم داشته باشیم.

1) $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_\alpha$

2) $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -Z_\alpha$

3) $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $\left|\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right| > Z_{\alpha/2}$

مثال: از دانشجویان دانشکده های A و B نمونه های تصادفی مستقل به ترتیب 40 تایی و 50 تایی انتخاب و یک امتحان عمومی مشترک از آنها گرفته شده است و میانگین نمرات به ترتیب 74 و 78 به دست آمده است. اگر فرض کنیم انحراف معیار نمرات کل دانشجویان دانشکده A و B به ترتیب 8 و 7 نمره است، آیا میانگین کل دانشجویان این دو دانشکده تفاوت معنی داری در سطح 0.01 و 0.05 دارند؟

حل:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$\bar{X} = 74, \quad \sigma_1 = 8, \quad n_1 = 40$$

$$\bar{Y} = 78, \quad \sigma_2 = 7, \quad n_2 = 50$$

آماره آزمون

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad Z = \frac{(74-78)-0}{\sqrt{\frac{64}{40} + \frac{49}{50}}} = -2.49$$

در سطح معنی دار 0.01، $\alpha = 0.01$، $Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.58$ پس چون $|Z|$ بزرگتر از $Z_{\alpha/2} = 2.58$ نیست پس فرض H_0 پذیرفته و H_1 رد می شود.

اما در سطح معنی دار 0.05، $\alpha = 0.05$ و $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$ پس چون $|Z| > Z_{\alpha/2}$ فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین های دو جامعه نرمال با واریانس های مجهول ولی برابر

این حالت مشابه حالت قبل است، ولی آماره آزمون به صورت

$$T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

در نظر گرفته می شود.

1) $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

2) $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

3) $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $\left|\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$

مثال: دو کشاورز A و B در مزرعه های خود گندم می کارند. کشاورز A از نوعی ضد آفت جدید استفاده می کند. میانگین برداشت محصول در هر هکتار از 12 هکتار زمین کشاورز A برابر با 139 و انحراف معیار 10 و در زمین کشاورز B برابر با 131 و انحراف معیار 11 است آیا در سطح معنی دار 0.05 می توان ادعا کرد که ضد آفت جدید در افزایش تولید محصول موثر است؟

$\bar{X} = 139, \ S_1 = 10 \ , \ n_1 = 12$

$\bar{Y} = 131, \ S_2 = 11 \ , \ n_2 = 12$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{11 \times 100 + 11 \times 121}{12+12-2} = \frac{2431}{22} = 110.5$$

$$\Rightarrow S_p = \sqrt{S_p^2} = 10.51$$

$$t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{139-131}{10.51\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}} = 1.85$$

سطح معنی داری آزمون 0.05، پس $\alpha = 0.05$،

t_{α, n_1+n_2-2} را محاسبه می کنیم:

$$t_{0.05, 22} = 1.72$$

چون $t = 1.85 > 1.72$ فرض H_0 در سطح معنی داری 0.05 رد و H_1 پذیرفته می شود.

سطح معنی داری آزمون 0.01، پس $\alpha = 0.01$،

$$t_{0.01, 22} = 2.51$$

پس در سطح معنی داری 0.01 چون $t = 1.85 < 2.51$ فرض H_0 پذیرفته و H_1 رد می شود.

آزمون فرض برای نسبت جامعه:

فرض کنید p نسبت تعداد اعضای از یک جامعه باشد که در یک ویژگی مشترکند. حال اگر یک نمونه n تایی از این جامعه در نظر بگیریم و X را تعداد موفقیت ها در این n عضو جامعه تعریف نماییم، مشروط بر اینکه حجم نمونه بزرگتر از 30 باشد، با تعریف $\hat{p} = \frac{X}{n}$ سه آزمون فرض زیر را در حالت کلی داریم:

1)
$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases} \qquad Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

اگر $Z > Z_\alpha$، فرض صفر رد و H_1 پذیرفته می شود.

2)
$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$$

اگر $Z < -Z_\alpha$، فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

3)
$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$$

اگر $|Z| > Z_{\alpha/2}$ فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته می شود.

مثال: بر اساس تجربیات گذشته، 90 درصد تولیدات یک کارخانه سالم هستند. برای کاهش نسبت تولیدات معیوب تغییراتی در خط تولید داده شده است و یک نمونه تصادفی به حجم 100 از تولیدات کارخانه پس از اعمال تغییرات انتخاب و پس از بررسی 5 قطعه معیوب یافت شده است. آیا در سطح معنی دار 0.05 می توان گفت نسبت تولیدات سالم افزایش یافته است؟

$$\begin{cases} H_0: p = 0.9 \\ H_1: p > 0.9 \end{cases} \qquad \hat{p} = 0.95,\ n = 100, \quad Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.95 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{100}}}$$

$$Z = 1.67$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$$

چون $Z = 1.67 > 1.645$ پس فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته است.

آزمون فرض برابری نسبت دو جامعه:

فرض کنید از دو جامعه مستقل با نسبت های P_1 و P_2 نمونه های تصادفی به حجم n_1 و n_2 که $(n_1, n_2 > 30)$ گرفته شده است. مشابه بخش قبل X_1 و X_2 را به ترتیب تعداد موفقیت ها در نمونه اول و دوم تعریف می کنیم همچنین $\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ و $\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2}$. اگر فرض $P_1 = P_2 = P$ را داشته باشیم، آنگاه:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{Pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

اما با برآورد P به کمک $\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$، آماره آزمون به صورت زیر تبدیل می شود:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

1) $\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $Z > Z_\alpha$

2) $\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $Z < -Z_\alpha$

3) $\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می شود اگر $|Z| > Z_{\alpha/2}$

مثال: در یک نمونه تصادفی از مردم یک شهر و اطراف آن در رابطه با طرفداری از یک کاندیدای ریاست جمهوری از میان 200 نفر مردم شهر 120 نفر و از میان 500 نفر مردم اطراف آن شهر 240 نفر طرفدار کاندیدای مورد نظر بوده اند. با انتخاب سطح معنی دار 0.025 آزمون کنید نسبت طرفداران کاندیدای مورد نظر در شهر بزرگتر از اطراف شهر است؟

$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$$

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{120}{200} = 0.6$$

$$\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{240}{500} = 0.48$$

$$\begin{cases} \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{120+240}{200+500} = 0.51 \\ \hat{q} = 1 - \hat{P} = 0.49 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.6 - 0.48}{\sqrt{(0.51)(0.49)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{500}\right)}} = 2.9$$

$$\alpha = 0.025 \Rightarrow Z_\alpha = Z_{0.025} = 1.96$$

چون $Z = 2.9 > Z_\alpha = 1.96$ لذا فرض H_0 رد و H_1 پذیرفته است.

آزمون فرض برای اختلاف میانگین داده‌های زوجی ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$)

برای یک نمونه تصادفی n تایی در حالتی که داده‌ها زوجی باشند و اختلاف میانگین‌ها را با μ_D نمایش دهیم آماره آزمون به صورت

$$T = \frac{\bar{D} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

خواهد بود و آزمون‌های فرض زیر را داریم:

$$1)\begin{cases} H_0: \mu_D = d_0 \\ H_1: \mu_D > d_0 \end{cases}$$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $t = \dfrac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} > t_{\alpha, n-1}$

$$2)\begin{cases} H_0: \mu_D = d_0 \\ H_1: \mu_D < d_0 \end{cases}$$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $t = \dfrac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} < -t_{\alpha, n-1}$

$$3)\begin{cases} H_0: \mu_D = d_0 \\ H_1: \mu_D \neq d_0 \end{cases}$$

فرض H_0 رد می‌شود اگر $|t| = \left|\dfrac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$

مثال: یک نمونه تصادفی از یک نوع آلیاژ خاص انتخاب کرده و می‌خواهیم تعیین کنیم آیا در تجزیه و تحلیل میزان آهن موجود در آن به روش شیمیایی و روش استفاده از اشعه X اختلاف وجود دارد یا نه. با فرض نرمال بودن دو جامعه سطح معنی‌دار 0.05 آزمون کنید که آیا در تجزیه و تحلیل میزان آهن موجود در آلیاژها تفاوت معنی‌داری وجود دارد؟

	1	2	3	4	5
اشعه X	2	2	2.3	2.1	2.4
روش شیمیایی	2.2	1.9	2.5	2.3	2.4
d_i	0.2	-0.1	0.2	0.2	0

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

μ_1: میانگین سطح آهن اندازه‌گیری شده به روش شیمایی

μ_2: میانگین سطح آهن اندازه‌گیری شده به روش اشعه X

$$\bar{d} = 0.1, \quad s_d = 0.141$$

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{0.1 - 0}{\frac{0.141}{\sqrt{5}}} = -1.6$$

$$\alpha = 0.05 \quad t_{\alpha/2,4} = t_{0.025,4} = 2.776$$

چون $|t| = 1.6$ کمتر از $t_{\alpha/2,4} = 2.776$ است لذا فرض H_0 پذیرفته و H_1 رد می‌شود.

آزمون فرض برای واریانس جامعه نرمال:

در آزمون فرض در مورد واریانس یک جامعه نرمال می‌توان آماره آزمون را به صورت

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

در نظر گرفت.

1) $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha, n-1}$

2) $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha, n-1}$

3) $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ یا $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2, n-1}$

مثال : مدیریک کارخانه نوشابه ، دستگاهی را خریداری کرده است که ادعا می‌کند با انحراف معیار ۱۰ میلی‌لیتر شیشه‌ها را پر می‌کند. برای بررسی صحت این ادعا یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از شیشه‌های پرشده درنظر گرفته شده است و نتایج $\bar{x}=255$ و $s^2=180$ به‌دست آمده است.

آیا ادعای طرح شده در سطح معنی‌دار 0.05 درست است؟

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 100 \\ H_1: \sigma^2 \neq 100 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 , \quad \alpha/2 = 0.025 \quad \chi^2_{\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0.025, 9} = 19$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0.975, 9} = 2.7$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \times 180}{100} = 16.2$$

چون مقدار $\chi^2 = 16.2$ در بازه $(2.7, 19)$ قرار دارد فرض H_0 پذیرفته و H_1 رد می‌شود.