

سری ها:

تعریف: یک سری نامتناهی که معمولاً سری نامیده می شود مجموع بی نهایت عبارت به فرم $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ است که آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

به a_n جمله عمومی سری گفته و a_1, a_2, \dots را جملات سری می گوئیم. دنباله مجموع های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا به s گوئیم، هرگاه دنباله مجموع های جزئی آن همگرا به s باشد یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ و در غیر اینصورت سری را واگرا گویند. مقدار s را مقدار همگرایی سری گوئیم.
سری هندسی: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

که دارای جمله عمومی $a_n = ar^{n-1}$ است را سری هندسی با جمله اول a و قدر نسبت r می نامیم.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

هرگاه $|r| < 1$ سری هندسی همگرا به $\frac{a}{1-r}$ است.

مثال: عدد همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ را به دست آورید.

حل: سری فوق یک سری هندسی با $a = e^{-1} = \frac{1}{e}$ و $r = \frac{1}{e}$ و $r < 1$. لذا این سری همگراست به

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

قضیه (شرط لازم همگرایی):

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد باید داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

لذا شرط لازم برای همگرایی سری این است که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

توجه کنید که این شرط کافی نیست (به عنوان مثال سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ همگرا نیست).

نکته: در بررسی رفتار یک سری اضافه کردن و یا حذف کردن تعداد متناهی جمله تاثیری در همگرایی یا واگرایی آن ندارد.

قضیه: اگر a_n یک دنباله اکیدا مثبت باشد ($a_n > 0$) در این صورت یا همگراست و یا به بینهایت واگرا می شود.

قضیه: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند در این صورت:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

آزمون انتگرال جهت بررسی همگرایی سری:

اگر f یک تابع مثبت، پیوسته، و نزولی برای $x \geq 1$ باشد و $a_n = f(n)$ در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\int_1^{\infty} f(x) dx$ یا

هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرا می باشند.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

حل: با توجه به اینکه $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ، پس با در نظر گرفتن $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ داریم $a_n = f(n)$. از طرفی $f(x)$

برای $x \geq 1$ پیوسته و مثبت است و

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

لذا $f'(x)$ برای $x \geq 1$ منفی، پس تابع $f(x)$ برای $x \geq 1$ نزولی است. بنابراین همه شرایط آزمون انتگرال برقرار است لذا سری فوق با انتگرال غیر عادی زیر هم رفتار می باشد:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln(b^2 + 1) - \ln(2)) = \infty$$

پس سری فوق نیز واگراست.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

حل: اگر $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ در این صورت $a_n = f(n)$ از طرفی $f(x)$ برای $x \geq 1$ تابعی مثبت، نزولی و پیوسته است. پس طبق آزمون انتگرال رفتار این سری با انتگرال غیرعادی زیر مشابه است:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

پس سری فوق همگراست.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

اگر $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ در این صورت $a_n = f(n)$ و

$$x \geq 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{x^2 \ln(x)} < 0$$

پس f برای $x \geq 2$ تابعی مثبت، نزولی، و پیوسته است. لذا رفتار سری فوق با انتگرال غیر عادی زیر یکسان است:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln(x)) \Big|_2^b = \infty$$

لذا سری فوق واگراست.

سری تلسکوپی یا ادغامی:

سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ را سری تلسکوپی می نامند که مجموع جزئی n ام آن برابر است با:

$$s_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

لذا سری تلسکوپی همگراست اگر و تنها اگر حد $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ موجود باشد و در این صورت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1$$

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

حل:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)\end{aligned}$$

اگر $a_n = \frac{1}{n+1}$ سری فوق یک سری تلسکوپی است و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ یک سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} = -\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_1 \right) = -\left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

سری متناوب:

سری ای که علامت جملات آن یکی در میان عوض می شود یعنی $a_n a_{n+1} < 0$ را یک سری تناوبی می نامیم. اگر

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و دنباله $|a_n|$ نزولی باشد، سری تناوبی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. در واقع هر سری تناوبی با فرض اینکه

$b_n > 0$ را می توان به یکی از دو فرم زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

در این صورت شرط همگرایی سری تناوبی به صورت زیر است:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$(2) \quad b_{n+1} \leq b_n \text{ یعنی نزولی باشد}$$

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ را در نظر بگیرید. چون $\frac{1}{n}$ نزولی است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ پس این سری همگراست.

$-p$ سری ها و سری هارمونیک:

سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

رایک $-p$ سری می گوئیم که p عدد ثابت و مثبتی است. اگر $p = 1$ سری فوق را سری هارمونیک می نامیم. به

کمک آزمون انتگرال و محاسبه انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ به سادگی می توان نشان داد که اگر $p > 1$ ، سری همگرا و اگر

$0 < p \leq 1$ ، $-p$ سری واگراست.

آزمون مقایسه:

فرض کنید $0 \leq a_n \leq b_n$ در این صورت:

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ را در نظر بگیرید. چون $0 < \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت کمتر از یک و لذا همگرا است، بنابراین طبق آزمون مقایسه این سری نیز همگرا می باشد.

مثال: سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ چون $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ و سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ سری هارمونیک و واگراست لذا طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ نیز واگراست.

آزمون مقایسه حدی:

فرض کنید $a_n, b_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ که در آن l عددی متناهی و مثبت است ($l \neq 0$). در این صورت دو سری

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یا هر دو همگرا هستند و یا هر دو واگرا می باشند. اگر $l = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد سری

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است و اگر $l = \infty$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا می باشد.

مثال:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{cn+b}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{cn+b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn+b}{n} = c$$

لذا این سری با سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ طبق آزمون مقایسه حدی هم رفتار و بنابراین واگرا می باشد.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$$

$$a_n = \frac{\ln(n)}{n^2+1}, b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)n^{3/2}}{n^2+1} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{3}{2}\sqrt{n}\ln(n)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{2}\ln(n)}{2\sqrt{n}} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ یک p -سری همگراست، طبق آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 + 1}$ همگراست.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2 - 4n + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 5}{n^2} = 3$$

پس طبق آزمون مقایسه حدی این سری نیز چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک p -سری همگراست ($p = 2 > 1$)، همگرا می باشد.

همگرایی مطلق و مشروط: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرایی مطلق گوئیم، هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرایی مشروط گوئیم هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد.

نکته: با توجه به آزمون مقایسه، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه می دهد.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ یک سری هندسی همگراست، لذا این سری یک سری همگرایی مطلق می باشد.

قضیه آزمون نسبت:

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد، همچنین فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ در این صورت:

- (۱) اگر $l < 1$ ، سری همگرایی مطلق است.
- (۲) اگر $l > 1$ ، سری واگراست.
- (۳) اگر $l = 1$ آزمون بی نتیجه است.

آزمون ریشه n ام کوشی:

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ در این صورت:

- (۱) اگر $l < 1$ ، سری همگرایی مطلق است.
- (۲) اگر $l > 1$ یا $l = \infty$ سری واگراست.
- (۳) اگر $l = 1$ آزمون بی نتیجه است.

مثال: همگرایی سری های زیر را بررسی کنید:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1$$

پس با توجه به آزمون ریشه، سری همگرایی مطلق است.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

با توجه به آزمون ریشه سری همگرا است.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

بنابراین با توجه به آزمون نسبت سری همگرایی مطلق است.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{3^{n+1}}}{\frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (n+1)^2 2^{n+2}}{3^{n+1} n^2 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2} = \frac{2}{3} < 1$$

طبق آزمون نسبت، سری همگرایی مطلق است.

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1 \end{aligned}$$

در نتیجه طبق آزمون نسبت سری واگراست.

سری توانی:

سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots$$

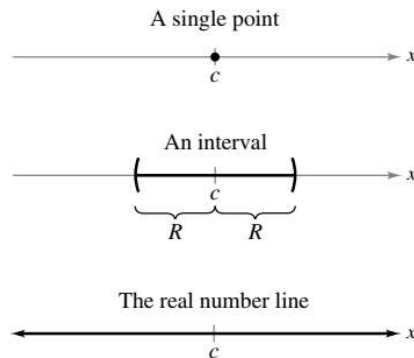
یک سری توانی از $(x - c)$ یا یک سری توانی حول نقطه c نام دارد. مقادیر a_i را ضرایب سری توانی می‌گوییم.

قضیه: برای هر سری توانی به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ یکی از سه حالت زیر برقرار است:

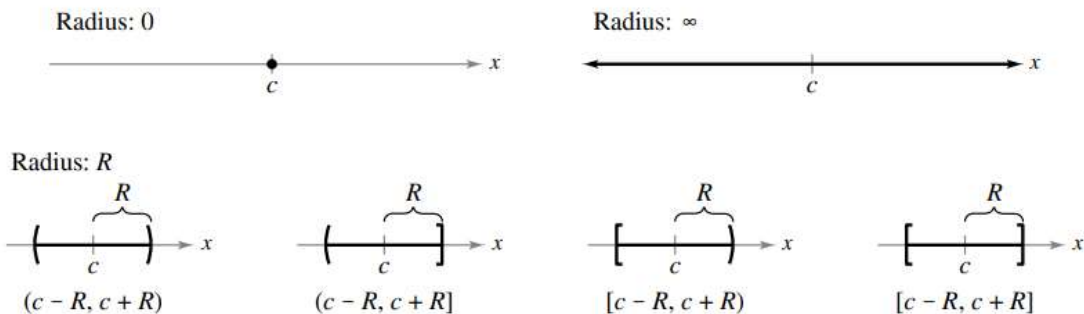
(۱) سری فقط در $x = c$ همگرا است.

(۲) عددی مانند R چنان موجود است که سری برای همه x هایی که $|x - c| < R$ همگرا و به ازای x هایی که $|x - c| > R$ واگراست. در نقاط انتهایی $(x = c \pm R)$ ممکن است سری همگرا و یا واگرا باشد. در این صورت R را شعاع همگرایی سری و c را مرکز همگرایی می‌نامیم.

(۳) سری در کل \mathbb{R} همگراست، یعنی شعاع همگرایی برابر ∞ است.



تعریف بازه همگرایی: مجموعه نقاطی که در آن سری توانی همگراست را بازه همگرایی گویند.



قضیه (آزمون نسبت برای تعیین شعاع همگرایی):

اگر $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ، شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ برابر است با $R = \frac{1}{l}$. اگر $l = 0$ باشد، $R = \infty$ و اگر $l = \infty$ باشد $R = 0$ است.

قضیه (آزمون ریشه برای تعیین شعاع همگرایی): اگر $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ موجود باشد و $R = \frac{1}{l}$ در این صورت شعاع همگرایی سری توانی برابر R است.

نکته: در هر دو بحث فوق در مورد شعاع سری های توانی از همان آزمون نسبت و آزمون ریشه کوشی استفاده شده است. پس همیشه می توانید به صورت مستقیم از این دو آزمون استفاده کنید.
مثال: فاصله همگرایی سری های زیر را بررسی کنید

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

پس شعاع همگرایی برابر $R = \frac{1}{l} = 0$ است و مرکز همگرایی نقطه صفر می باشد. پس این سری فقط در نقطه صفر همگراست.

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{l} = 1$$

پس اگر $|x-2| < 1$ سری همگراست. حال باید نقاط ابتدایی و انتهایی را بررسی کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n$$

$$x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3$$

لذا در $x = 1$ و $x = 3$ واگراست. بنابراین فاصله همگرایی برابر است با $I = (1, 3)$.

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

در این مسئله می خواهیم به صورت مستقیم فاصله همگرایی را محاسبه کنیم.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+1)} = 0 < 1$$

سری برای هر $x \in \mathbb{R}$ همگراست. لذا شعاع همگرایی $R = \infty$ می باشد و فاصله همگرایی \mathbb{R} .

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2}$$

پس شعاع همگرایی برابر است با $R = \frac{1}{l} = \frac{2}{e}$ لذا اگر

$$|x-1| < \frac{2}{e}$$

سری همگراست. حال باید همگرایی سری در نقاط ابتدا و انتهای بازه بالا یعنی $x = 1 \pm \frac{2}{e}$ بررسی شود.

$$x = 1 + \frac{2}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

چون شرط لازم همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ آن است که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ پس سری توانی در $x = 1 + \frac{2}{e}$ واگراست. به

صورت مشابه می توان نشان داد در $x = 1 - \frac{2}{e}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ واگراست، پس فاصله همگرایی برابر

است با $\left(1 - \frac{2}{e}, 1 + \frac{2}{e}\right)$.