انتگرال غیر عادی:

۱) انتگرال غیر عادی نوع اول: اگر f تابعی پیوسته روی $[a,\infty)$ باشد، در این صورت:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

۲) اگر f تابعی پیوسته روی $(-\infty,b]$ باشد، در این صورت:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

۳) اگر f تابع پیوسته روی $(-\infty,\infty)$ باشد، در این صورت:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

که در اینجا c یک مقدار دلخواه حقیقی است.

در دو حالت اول انتگرال های غیر عادی همگرا هستند هرگاه حدود موجود باشند و در غیر اینصورت واگرا می‌باشند.

در حالت سوم انتگرال واگراست اگر یکی از انتگرال های سمت راست واگرا باشد.

مثال:

$$1)\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln(b)-\ln(1) = \infty$$

لذا انتگرال فوق واگراست.

$$2)\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} - e^{-b} - (-1) = 1$$

بنابراین انتگرال فوق همگراست.

$$3)\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}(b) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

لذا انتگرال فوق همگراست.

گاهی از قاعده هوپیتال استفاده میکنیم:

$$4)\int_1^\infty (1-x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b (1-x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} xe^{-x}\Big|_1^b = \left(\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b}\right) - \frac{1}{e} \overset{H}{=} \left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b}\right) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

قضیه p ـ انتگرال ها: اگر $0 < a < \infty$ آنگاه

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \int_a^\infty x^{-p}dx = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & p > 1 \\ \text{واگراست} & p \le 1 \end{cases}$$

قضیه: انتگرال هایی به فرم زیر

$$\int_a^\infty e^{-px}dx, \qquad \int_{-\infty}^b e^{px}dx$$

برای هر $p > 0$ همگرا و به ازای هر $p \le 0$ واگرا هستند.

قضیه (آزمون مقایسه): فرض کنید $-\infty \le a < b \le \infty$ و توابع f,g پیوسته روی (a,b) باشند و همچنین $0 \le f(x) \le g(x)$ در این صورت اگر $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگراست و

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

برعکس اگر $\int_a^b f(x)dx$ واگرا باشد $\int_a^b g(x)dx$ واگراست.

قضیه (آزمون مقایسه): فرض کنید $-\infty \le a < b \le \infty$ و توابع f,g پیوسته روی (a,b) باشند و همچنین $0 \le f(x) \le g(x)$ در این صورت اگر $\int_a^b g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگراست و

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

برعکس اگر $\int_a^b f(x)dx$ واگرا باشد $\int_a^b g(x)dx$ واگراست.

مثال: همگرایی انتگرال زیر را بررسی کنید:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

حل:

$$x \in [0,1] \Rightarrow 0 < e^{-x^2} \le 1 \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx < \int_0^1 1dx = 1$$

$$x \in [1,\infty] \Rightarrow 0 < e^{-x^2} \le e^{-x} \Rightarrow 0 < \int_1^\infty e^{-x^2}dx < \int_1^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{e}$$

لذا انتگرال فوق همگراست ومقدار آن کمتر از $1+\frac{1}{e}$ است.

قضیه آزمون مقایسه حدی:

اگر f,g در بازه $[a,\infty)$ مثبت و پیوسته باشند و $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ در این صورت اگر $A\neq 0,\infty$ ، $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ و $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ یا هردو موجودند و یا هردو واگرا هستند.

اگر $A=0$ و $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ همگراست.

اگر $A=\infty$ و $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ واگرا باشد، $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ واگراست.

مثال: همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

$$1)\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$$

در آزمون مقایسه حدی $f=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ و $g=\frac{1}{x}$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\ln(x^2+1)=\infty$$

چون $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ یک $p-$انتگرال واگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال غیر عادی فوق واگراست.

$$2)\int\limits_1^\infty \frac{\tan(\frac{1}{x})}{1+x\sqrt{x}}dx$$

در آزمون مقایسه حدی $f=\frac{\tan(\frac{1}{x})}{1+x\sqrt{x}}$ و $g=\frac{1}{x^{3/2}}$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\tan(\frac{1}{x})}{1+x\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)x^{\frac{3}{2}}}{1+x\sqrt{x}}=0$$

چون $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ یک $p-$ انتگرال همگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال غیر عادی فوق همگراست.