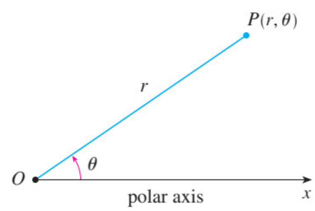
مختصات قطبی:

در مختصات قطبی یک نقطه ثابت در صفحه به‌عنوان قطب یا مبدا در نظر گرفته می شود که آن را با O نمایش می دهیم همچنین یک نیم خط یا شعاع ثابت خارج شده از آن را به عنوان محور قطبی در نظر میگیریم و آن را با l نمایش می دهیم. (توجه کنید که معمولاً محور قطبی به صورت افقی و در جهت راست کشیده می شود) در این صورت هر نقطه مانند P در صفحه را با توجه به فاصله آن از قطب یعنی r و زاویه ای که پاره خط OP با محور قطبی میسازد یعنی θ به صورت $P=(r,\theta)$ مشخص می کنیم.



تذکر: اگر θ در خلاف جهت عقربه های ساعت اندازه‌گیری شود مثبت و اگر در جهت عقربه های ساعت اندازه‌گیری شود منفی است.

تذکر: r را مختص شعاعی و θ را مختص زاویه ای می نامیم.

تذکر: معمولاً قطب را مبدا مختصات و محور قطبی را قسمت مثبت محور x ها در نظر میگیریم.

توجه کنید که نمایش یک نقطه در مختصات قطبی برخلاف مختصات دکارتی منحصر به فرد نیست. یعنی اگر $P=(r,\theta)$ در این صورت $P=(r,\theta+۲k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$. همچنین قطب را می‌توان به صورت $(۰,\theta)$ نمایش داد.

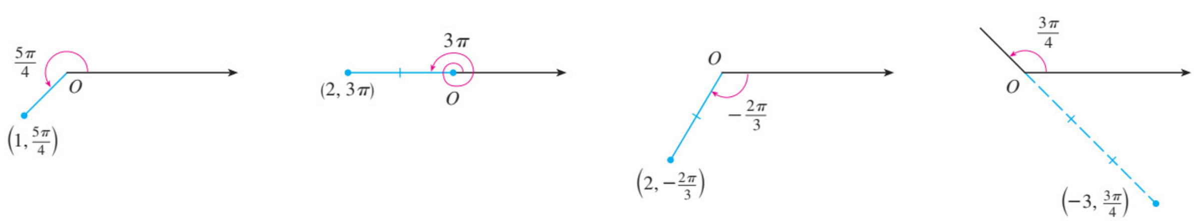
تذکر: برای تعمیم تعریف می توانیم نقاط $P=(r,\theta)$ که در آن $r<۰$ هستند را به صورت $P=(-r,\theta+\pi)$ تعریف کنیم. از نظر هندسی در واقع قرینه نقطه $(-r,\theta)$ نسبت به قطب را به صورت $P=(r,\theta)$ تعریف می کنیم.

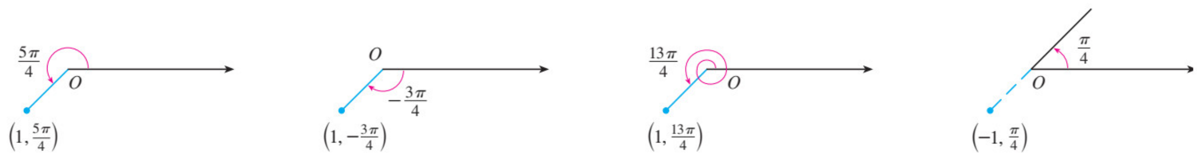
لذا:

$$P=(r,\theta)=(r,\theta+۲k\pi)=(-r,\theta+(۲k+۱)\pi)$$

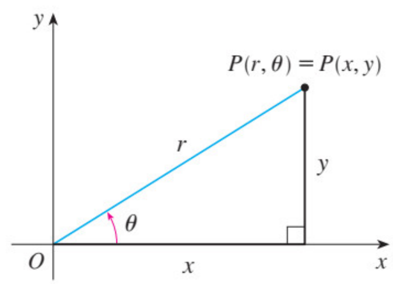
در حالت کلی:

$$P=(r,\theta)=\left((-۱)^k r,\theta+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$$





تبدیل بین مختصات دکارتی و قطبی: اگر مبدا مختصات را قطب و قسمت مثبت محور x ها را به عنوان محور قطبی در نظر بگیریم، در این صورت رابطه زیر بین مختصات دکارتی و قطبی برقرار است:



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}, \begin{cases} r^{۲} = x^{۲} + y^{۲} \\ tg(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

تذکر: برای پیدا کردن θ باید دقت کرد که θ با ربعی که نقطه در آن قرار دارد موافقت داشته باشد.

مثال: مختصات دکارتی نقطه ای را بیابید که نمایش آن در مختصات قطبی به صورت $(۳, \frac{\pi}{۳})$ است.

$$r = ۳, \theta = \frac{\pi}{۳}$$
$$x = r\cos(\theta) = ۳\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۳}{۲}$$
$$y = r\sin(\theta) = ۳\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

پس نمایش دکارتی این نقطه به صورت $(\frac{۳}{۲}, \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$ است.

مثال: مختصات قطبی نقطه ای را بیابید که نمایش دکارتی آن $(۱, -۱)$ است.

$$r = \sqrt{۱^{۲} + ۱^{۲}} = \sqrt{۲}$$
$$tg(\theta) = \frac{y}{x} = -۱$$

با توجه به اینکه این نقطه در ربع چهارم قرار دارد $\theta = \frac{۷\pi}{۴} = -\frac{\pi}{۴}$ است، پس نمایش قطبی این نقطه به صورت $\left(\sqrt{۲}, ۷\frac{\pi}{۴}\right) = (\sqrt{۲}, -\frac{\pi}{۴})$ است.

تعریف: نمودار یک معادله در مختصات قطبی از همه نقاط و فقط نقاط P تشکیل شده است که **دست کم یک نمایش** قطبی صادق در معادله داشته باشند.

$$\begin{aligned} &r = f(\theta) \\ &F(r,\theta) = c \end{aligned}$$

مثال: معادله دکارتی منحنی قطبی $r = ۲a\cos(\theta)$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} &r = ۲a\cos\theta \\ &r^۲ = ۲a\underbrace{r\cos\theta}_{x} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۲ax \Rightarrow x^۲ - ۲ax + a^۲ + y^۲ = a^۲ \Rightarrow (x-a)^۲ + y^۲ = a^۲ \end{aligned}$$

مثال: اگر معادله قطبی یک نمودار $r^۲ = ۴\sin(۲\theta)$ باشد، معادله دکارتی آن را بیابید.

$$\begin{aligned} &r^۲ = x^۲ + y^۲ \\ &\sin(۲\theta) = ۲\underbrace{\sin(\theta)}_{\frac{y}{r}}\underbrace{\cos(\theta)}_{\frac{x}{r}} \end{aligned}$$

$$x^۲ + y^۲ = ۸\frac{xy}{r^۲} \Rightarrow (x^۲ + y^۲) = ۸\frac{xy}{x^۲ + y^۲} \Rightarrow (x^۲ + y^۲)^۲ = ۸xy$$

مثال: اگر معادله دکارتی یک نمودار $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۰$ باشد معادله قطبی آن را بیابید.

$$\begin{aligned} &r^۲\cos^۲(\theta) + r^۲\sin^۲(\theta) - ۴r\cos(\theta) = ۰ \\ &r^۲ - ۴r\cos(\theta) = ۰ \Rightarrow r(r - ۴\cos(\theta)) = ۰ \\ &\begin{cases} r = ۰ \\ r - ۴\cos(\theta) = ۰ \Rightarrow r = ۴\cos(\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

توجه کنید که $r = ۰$ نمایش دهنده قطب است و خود قطب در معادله بر روی نمودار $r = ۴\cos(\theta)$ قرار دارد چون اگر $\theta = \frac{\pi}{۲}$ ، $r = ۰$ پس معادله قطبی نمودار عبارت است از

$$r = ۴\cos(\theta)$$

اما با توجه به اینکه $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۰$ را می توان به صورت $(x-۲)^۲ + y^۲ = ۴$ نوشت معادله $r = ۴\cos(\theta)$ نمایش دهنده نمودار یک دایره به شعاع دو و مرکز $(۲,۰)$ است.

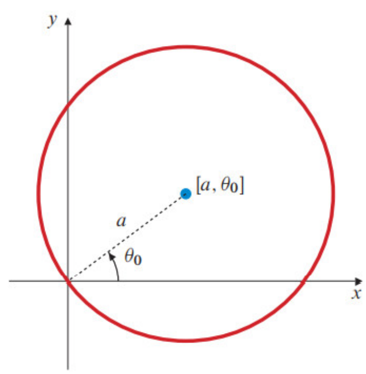
مثال: معادله دکارتی منحنی $r^۲ = ۴\cos(۲\theta)$ را به دست آورید.

$$r^۲ = ۴(\cos^۲(\theta) - \sin^۲(\theta)) \overset{\times r^۲}{\Rightarrow} r^۴ = ۴r^۲(\cos^۲(\theta) - \sin^۲(\theta)) \Rightarrow (x^۲ + y^۲)^۲ = ۴(x^۲ - y^۲)$$

مثال: معادله دکارتی منحنی $r = ۲a\cos\left(\theta - \theta_۰\right)$ را یافته و سپس آنرا رسم کنید.

$$\begin{aligned}
&r^۲ = ۲ar\cos(\theta - \theta_۰) = ۲ar\cos(\theta_۰)\cos(\theta) + ۲ar\sin(\theta_۰)\sin(\theta)\\
&x^۲ + y^۲ = ۲a\cos(\theta_۰)x + ۲a\sin(\theta_۰)y\\
&x^۲ - ۲a\cos(\theta_۰)x + y^۲ - ۲a\sin(\theta_۰)y + a^۲ = a^۲\\
&x^۲ - ۲a\cos(\theta_۰)x + a^۲\cos^۲(\theta_۰) + y^۲ - ۲a\sin(\theta_۰)y + a^۲\sin^۲(\theta_۰) = a^۲\\
&(x - a\cos(\theta_۰))^۲ + (y - a\sin(\theta_۰))^۲ = a^۲
\end{aligned}$$

که دایره ای به شعاع a و مرکز $(a,\theta_۰)$ است.

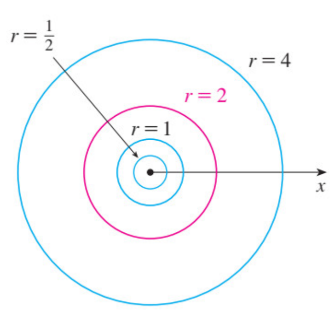


نکته: نمودار قطبی معادله $r = f(\theta - \theta_۰)$ همان نمودار معادله $r = f(\theta)$ است که به اندازه $\theta_۰$ حول مبدا دوران یافته است.

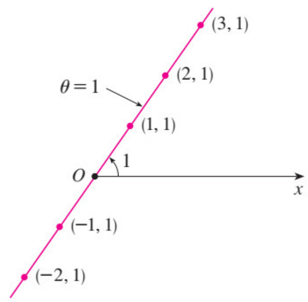
رسم منحنی های قطبی:

مثال: نمودار معادله قطبی $r = a > ۰$ یک دایره به شعاع a است.

$$\sqrt{x^۲ + y^۲} = a \Rightarrow x^۲ + y^۲ = a^۲$$

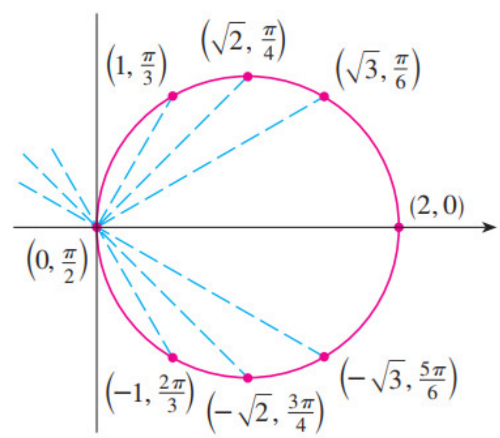


مثال: نمودار $\theta = ۱$ را رسم کنید.

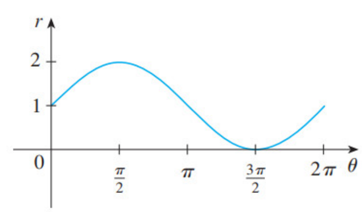


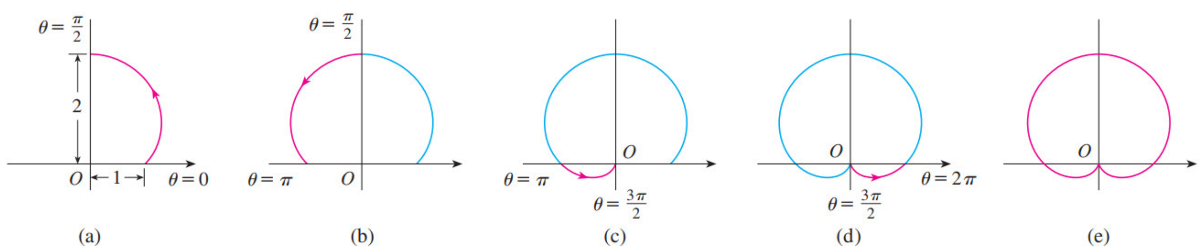
مثال: نمودار منحنی قطبی $r = ۲\cos\theta$ را رسم کنید.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

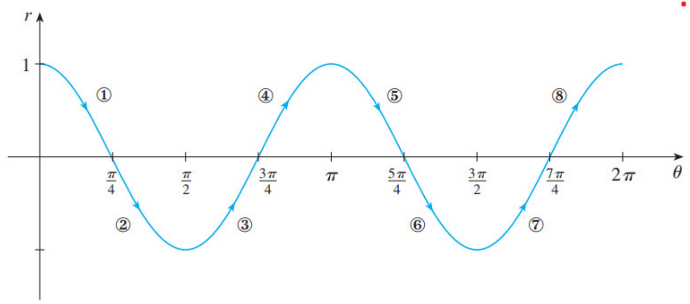


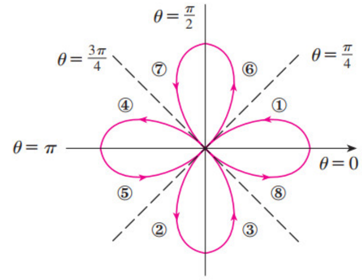
مثال: نمودار منحنی قطبی $r = ۱ + \sin(\theta)$ را رسم کنید.(دلوار)



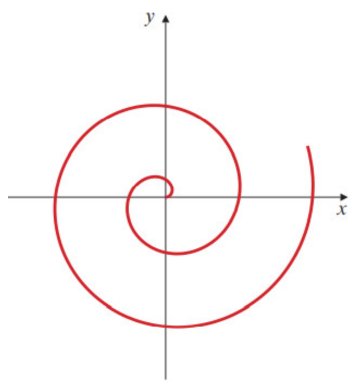


مثال: نمودار منحنی قطبی $r = \cos(2\theta)$ را رسم کنید.(رز ۴ پر)





مثال: نمودار منحنی قطبی $r = \theta$ را رسم کنید. (پیچ ارشمیدسی)

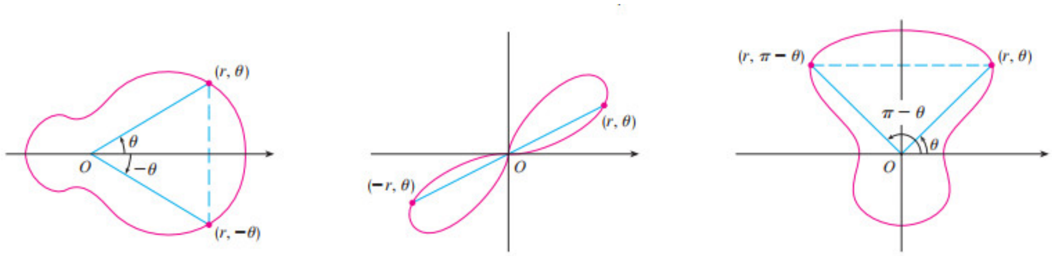


تقارن در منحنی های قطبی:

اگر با تغییر θ به $-\theta$ معادله تغییر نکند، نمودار آن نسبت به محور قطبی متقارن است.

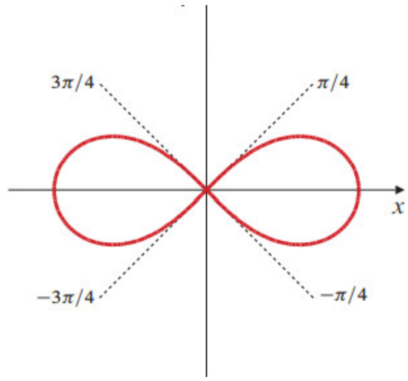
هر گاه با تغییر θ به $\pi - \theta$ معادله قطبی تغییر نکند، نمودار حاصل نسبت به خط عمود بر محور قطبی در قطب یعنی $\theta = \frac{\pi}{2}$ متقارن است.

هر گاه با تغییر r به $-r$ یا θ به $\pi + \theta$ معادله قطبی تغییر نکند، نمودار حاصل نسبت به قطب متقارن است.



(a) (b) (c)

تمرین: نمودار منحنی قطبی به معادله $r^2 = \cos(2\theta)$ را رسم کنید. (لمنیسکات یا پروانه)



شیب خط مماس: نمودار منحنی قطبی $r = f(\theta)$ را در نظر بگیرید، می خواهیم شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه P روی منحنی به دست آوریم.

$$y = r\sin(\theta)$$
$$x = r\cos(\theta)$$

لذا یک تابع پارامتری از پارامتر θ داریم، پس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin(\theta)\frac{dr}{d\theta} + r\cos(\theta)}{\cos(\theta)\frac{dr}{d\theta} - r\sin(\theta)}$$

اگر $\cos(\theta) \neq ۰$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan(\theta)\frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\tan(\theta)}$$

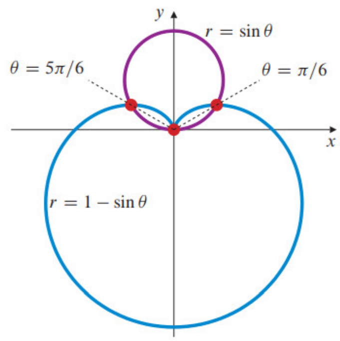
مثال: شیب خط مماس بر منحنی به معادله $r = ۱ - \cos\theta$ در نقطه $\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\pi}{۴}\right)$ را بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan(\frac{\pi}{۴})\sin(\frac{\pi}{۴}) + (۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\sin(\frac{\pi}{۴}) - (۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})\tan(\frac{\pi}{۴})} = \frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} = \sqrt{۲} - ۱$$

اشتراک نمودارها در مختصات قطبی:

مثال: نقاط اشتراک دو منحنی $r = \sin(\theta)$ و $r = ۱ - \sin(\theta)$ را به دست آورید.

$$\sin(\theta) = ۱ - \sin(\theta) \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}, \theta = \frac{۵\pi}{۶}$$
$$(\frac{۱}{۲}, \frac{\pi}{۶}), (\frac{۱}{۲}, \frac{۵\pi}{۶})$$



اما همانطور که مشاهده میشود قطب نیز یک جواب مساله هست در واقع همیشه باید قطب به صورت جداگانه چک شود:

$$\sin\theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۰$$
$$۱ - \sin\theta = ۰ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

نکته: توجه کنید که اگر

$$r = f(\theta)$$

همین منحنی از

$$(-۱)^n r = f(\theta + n\pi) \tag{۱}$$

نیز به دست می‌آید.

برای به دست آوردن نقاط اشتراک منحنی های $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$:

۱) با توجه به رابطه (۱) همه معادلات متمایز دومنحنی را به دست می‌آوریم:

$$r = f_۱(\theta), r = f_۲(\theta), ... \tag{۲}$$

$$r = g_۱(\theta), r = g_۲(\theta), ... \tag{۳}$$

۲) هر معادله (۲) *را با معادله* (۳) حل می‌کنیم.

۳) با قرار دادن $r = ۰$ در دو معادله تحقیق می‌کنیم آیا قطب اشتراک دو منحنی هست یا نه.

مثال: نقاط اشتراک دو منحنی $r = ۲ - ۲\cos\theta$ و $r = ۲\cos\theta$ را بیابید.

حل: ابتدا معادلات دیگر منحنی $r = ۲ - ۲\cos\theta$ را به دست می‌آوریم:

$$-r = ۲ - ۲\cos(\theta + \pi)$$
$$-r = ۲ + ۲\cos\theta$$
$$r = -۲ - ۲\cos(\theta)$$

و

$$
\begin{aligned}
&(-۱)^{۲} r = ۲ - ۲\cos(\theta + ۲\pi) \\
&r = ۲ - ۲\cos\theta
\end{aligned}
$$

که همان معادله اصلی است.

در گام بعد معادلات دیگر منحنی $r = ۲\cos\theta$ را به دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
&-r = ۲\cos(\theta + \pi) \\
&-r = -۲\cos(\theta) \\
&r = ۲\cos\theta
\end{aligned}
$$

که همان معادله اصلی است.

لذا برای منحنی اول دو معادله $r = ۲ - ۲\cos\theta$ و $-r = ۲ + ۲\cos\theta$ و برای منحنی دوم یک معادله $r = ۲\cos\theta$ را داریم. حال این معادلات را با هم حل میکنیم:

$$
\begin{aligned}
&۲\cos\theta = ۲ - ۲\cos\theta \\
&۴\cos\theta = ۲ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳} \\
&(۱, \frac{\pi}{۳}), (۱, ۵\frac{\pi}{۳})
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب داریم:

$$
\begin{aligned}
&۲ + ۲\cos\theta = -۲\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{۲\pi}{۳}, \theta = \frac{۴\pi}{۳} \\
&(-۱, \frac{۲\pi}{۳}), (-۱, \frac{۴\pi}{۳}) \\
&(-۱, \frac{۴\pi}{۳}) = (۱, \frac{\pi}{۳}) \\
&(-۱, \frac{۲\pi}{۳}) = (۱, \frac{۵\pi}{۳})
\end{aligned}
$$

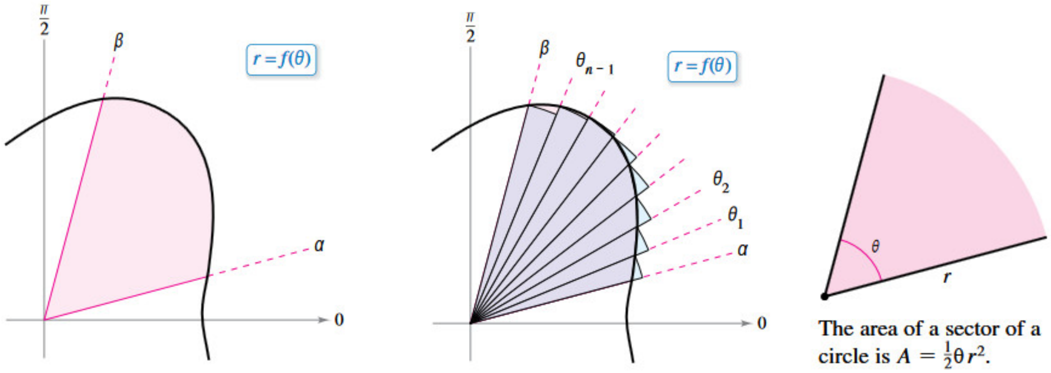
که همان نقاط اشتراک قبلی هستند.

در نهایت می توان نشان داد که قطب روی هر دو منحنی قرار دارد.

مساحت در مختصات قطبی:

قضیه: اگر f یک تابع پیوسته و نامنفی روی بازه $[\alpha, \beta]$ باشد، $۰ < \beta - \alpha \leq ۲\pi$ ، در این صورت مساحت ناحیه محدود به منحنی $r = f(\theta)$ و خطوط شعاعی $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ برابر است با:

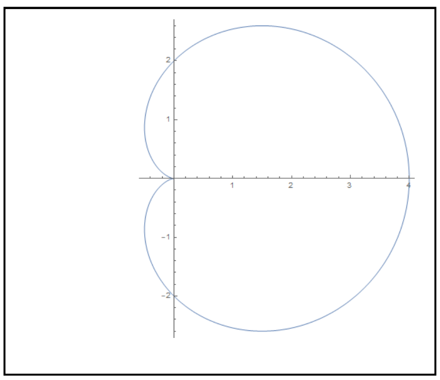
$$
A = \frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta} \left[f(\theta)\right]^{۲} d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta} r^{۲} d\theta
$$



The area of a sector of a circle is $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)^۲ \Delta\theta = \frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta} \left[f(\theta) \right]^۲ d\theta$$

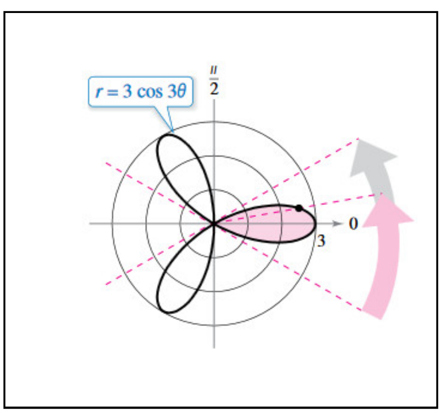
مثال: مساحت ناحیه محدود به دلوار $r = ۲ + ۲\cos\theta$ را بیابید.



با توجه به تقارن منحنی دلوار نسبت به محور قطبی کافیست مساحت ناحیه محدود به دلوار و بالای محور قطبی را تعیین کرده و در نهایت آن را در ۲ ضرب کنیم.

$$A = ۲\int_{۰}^{\pi} \frac{۱}{۲}(۲ + ۲\cos\theta)^۲ d\theta = ۴\int_{۰}^{\pi} (۱ + ۲\cos\theta + \underbrace{\cos^۲\theta}_{\frac{۱}{۲}(۱+\cos(۲\theta))})d\theta$$

$$= ۴\left(\theta + ۲\sin\theta + \frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin(۲\theta)\right)\Big|_{۰}^{\pi} = ۶\pi$$

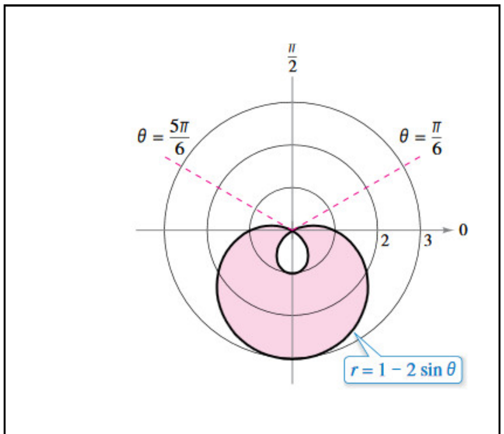


مثال: مساحت یک گلبرگ از رز $r = ۳\cos(۳\theta)$ را بیابید.

$$A = \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} \left[۳\cos(۳\theta) \right]^۲ d\theta = \frac{۹}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} \frac{۱}{۲}(۱ + \cos(۶\theta))d\theta$$

$$= \frac{۹}{۴}(\theta + \frac{۱}{۶}\sin(۶\theta))\Big|_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۳\pi}{۴}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به داخل لیماسیون $r = ۱ - ۲\sin\theta$ و بیرون طوقه (حلقه) آن را بیابید.



ابتدا مساحت طوقه را محاسبه میکنیم:

$$A_۱ = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\left[۱ - ۲\sin\theta\right]^۲ d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\left(۱ - ۴\sin\theta + ۴\underbrace{\sin^۲\theta}_{\frac{۱-\cos(۲\theta)}{۲}}\right)d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}\left(۳ - ۴\sin\theta - ۲\cos ۲\theta\right)d\theta = \frac{۱}{۲}(۳\theta + ۴\cos\theta - \sin ۲\theta)\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} = \pi - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

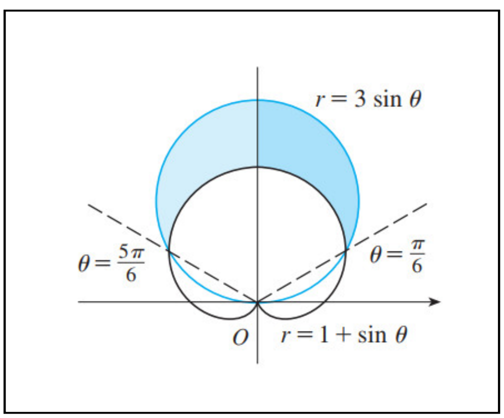
حال مساحت محدود به طوقه بیرونی را به صورت مشابه با انتگرال گیری از $\frac{۵\pi}{۶}$ تا $\frac{۱۳\pi}{۶}$ محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم $A_۲ = ۲\pi + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ بنابراین:

$$A = A_۲ - A_۱ = \pi + ۳\sqrt{۳}$$

مثال: مساحت محدود به حلقه های پروانه $r^۲ = a^۲\cos ۲\theta$ را به دست آورید.

$$A = ۴(\frac{۱}{۲}\int_۰^{\pi/۴} a^۲\cos(۲\theta)d\theta) = a^۲\sin(۲\theta)\Big|_۰^{\pi/۴} = \frac{۱}{۴}a^۲$$

مثال: مساحت ناحیه قرار گرفته درون دایره $r = ۳\sin\theta$ و بیرون دلوار $r = ۱ + \sin\theta$ را بیابید.



حل: ابتدا نقاط اشتراک دومنحنی را به دست می‌آوریم. با قرار دادن $۳\sin\theta = ۱ + \sin\theta$ ، داریم $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$ یعنی $\theta = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به شکل:

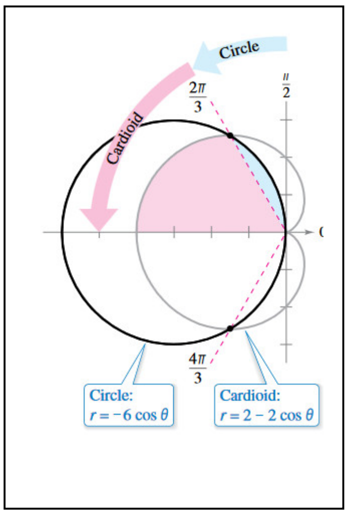
$$A = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}(۳\sin\theta)^۲ d\theta - \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}}(۱ + \sin\theta)^۲ d\theta$$

از طرفی با توجه به تقارن ناحیه نسبت به محور $\theta = \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$A=۲\left(\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}۹\sin^۲\theta d\theta-\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+۲\sin\theta+\sin^۲\theta)d\theta\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۸\underbrace{\sin^۲\theta}_{\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)}-۱-۲\sin\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۳-۴\cos ۲\theta-۲\sin\theta)d\theta=۳\theta-۲\sin ۲\theta+۲\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}=\pi$$

مثال: مساحت ناحیه مشترک محصور به منحنی های $r=-۶\cos\theta$ و $r=۲-۲\cos\theta$ را بیابید.



$$A=۲\left(\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۲\pi}{۳}}(-۶\cos\theta)^۲d\theta+\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}\left(۲-۲\cos\theta\right)^۲d\theta\right)=\ldots$$

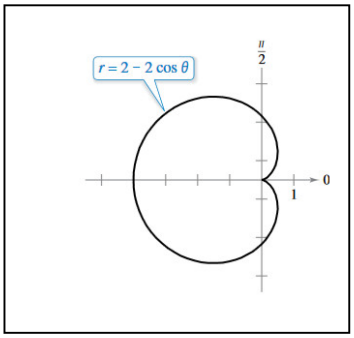
محاسبه طول قوس در مختصات قطبی:

قضیه: فرض کنید f یک تابع با مشتق پیوسته روی بازه $[\alpha,\beta]$ باشد. در این صورت طول قوس منحنی $r=f(\theta)$ از $\theta=\alpha$ تا $\theta=\beta$ برابر است با:

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[f(\theta)]^۲+[f'(\theta)]^۲}d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^۲+[\frac{dr}{d\theta}]^۲}d\theta$$

مثال طول قوس دلوار $r=۲-۲\cos\theta$ از $\theta=۰$ تا $\theta=۲\pi$ را به دست آورید.

حل:



$$s = \int_{۰}^{۲\pi} \sqrt{(۲ - ۲\cos\theta)^۲ + (۲\sin\theta)^۲}\,d\theta = \int_{۰}^{۲\pi} \sqrt{۴ - ۸\cos\theta + \underbrace{۴\cos^۲\theta + ۴\sin^۲\theta}_{۴}}\,d\theta$$

$$= ۲\sqrt{۲}\int_{۰}^{۲\pi} \sqrt{۱ - \cos\theta}\,d\theta = ۲\sqrt{۲}\int_{۰}^{۲\pi} \sqrt{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}}\,d\theta = ۴\int_{۰}^{۲\pi} \sin\frac{\theta}{۲}\,d\theta = -۸\cos\frac{\theta}{۲}\Big|_{۰}^{۲\pi} = ۱۶$$