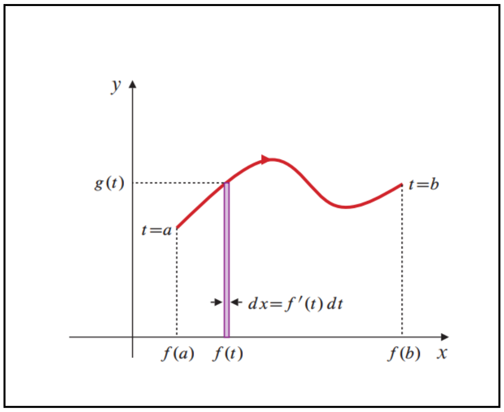
مساحت محصور بین منحنی های پارامتری:

فرض کنید منحنی C به کمک معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ برای $a \le t \le b$ تعریف شده است. در این صورت اگر رابطه $f'(t) \ge ۰$ و $g(t) \ge ۰$ بر $[a,b]$ برقرار باشد، در این صورت با توجه به شکل زیر مساحت ناحیه محدودبه منحنی C و بالای محور x ها و خطوط $x = f(a)$ و $x = f(b)$ به صورت زیر است:



$$A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$$

با استدلال های مشابه داریم:

۱ــ اگر بر $[a,b]$ داشته باشیم $f'(t) \ge ۰$ و $g(t) \ge ۰$ ، آنگاه $A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$.

۲ــ اگر بر $[a,b]$ داشته باشیم $f'(t) \ge ۰$ و $g(t) \le ۰$ ، آنگاه $A = -\int_a^b g(t)f'(t)dt$.

۳ــ اگر بر $[a,b]$ داشته باشیم $f'(t) \le ۰$ و $g(t) \ge ۰$ ، آنگاه $A = -\int_a^b g(t)f'(t)dt$.

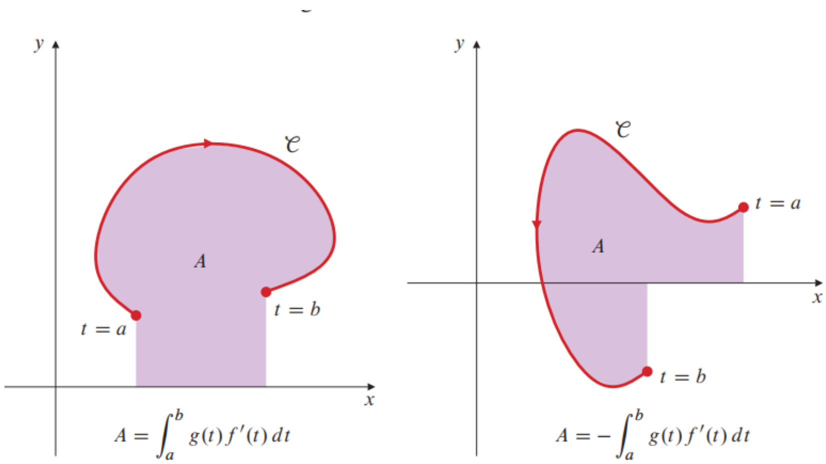
٤ــ اگر بر $[a,b]$ داشته باشیم $f'(t) \le ۰$ و $g(t) \le ۰$ ، آنگاه $A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$. یعنی در واقع

$$A = \int_a^b \left| g(t)f'(t) \right| dt$$

با توجه به مباحث فوق داریم:

$$\int_a^b g(t)f'(t)dt = A_۱ - A_۲$$

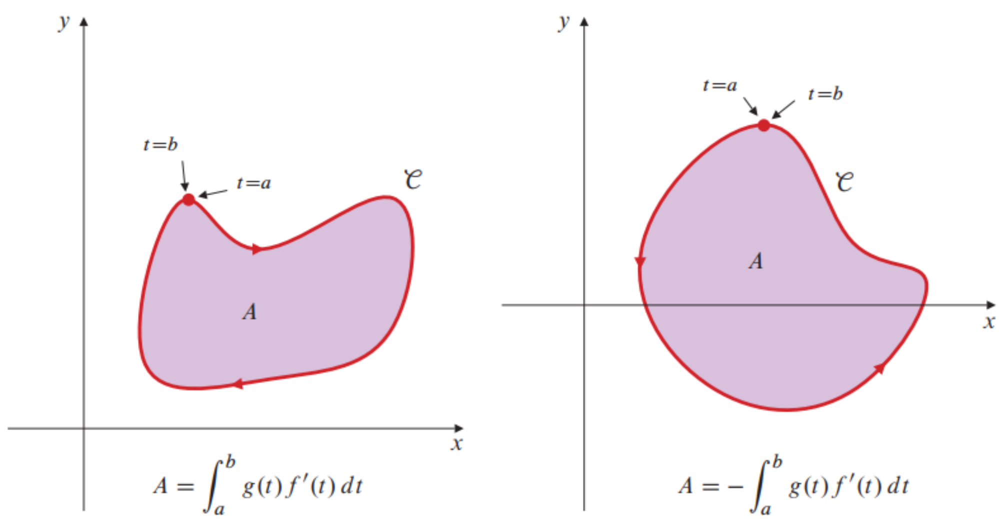
که در آن $A_۱$ مساحت قرار گرفته بین منحنی C و آن قسمتی از محور x هاست که شامل نقاط $x = f(t)$ است به طوری که $g(t)f'(t) \ge ۰$ و $A_۲$ به طور مشابه مساحت قسمتی است که $g(t)f'(t) < ۰$. در حالت کلی به شکل زیر دقت کنید:



به ویژه اگر C یک منحنی بسته باشد که خودش را قطع نکند داریم:

اگر C با افزایش t ساعتگرد پیموده شود: $A = \int_a^b g(t)f'(t)dt$

اگر C با افزایش t پادساعتگرد پیموده شود: $A = -\int_a^b g(t)f'(t)dt$

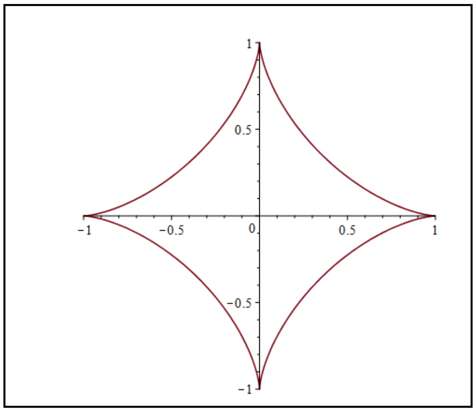


مثال: مساحت محصور در بیضی $x = a\cos(\theta)$ و $y = b\sin(\theta)$ که $0 \leq t \leq 2\pi$ را به دست آورید.

با توجه به حرکت پادساعتگرد داریم:

$$A = -\int_0^{2\pi} (b\sin(t))(-a\sin(t))dt = ab\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)dt = \frac{ab}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = \pi ab$$

مثال: مساحت ستاره گون $x=\cos^{۳}\theta, y=\sin^{۳}\theta$ را به دست آورید.



$$A=-۴\int_{۰}^{\pi/۲}\sin^{۳}t(-۳a\cos^{۲}t\sin t)dt=۱۲\int_{۰}^{\pi/۲}\sin^{۴}t\cos^{۲}t dt=...$$