توابع برداری:

فرض کنید ذره‌ای در فضا در بازه زمانی I در حرکت است. در این صورت موقعیت این ذره در لحظه t را می‌توانیم بصورت

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad t \in I \qquad (1)$$

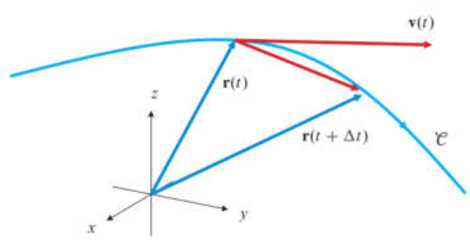
نمایش دهیم. در این صورت مجموعه همه نقاط $P = (x(t), y(t), z(t))$ که $t \in I$ منحنی ای در فضا را مشخص می‌کنند که آنرا با C نمایش می‌دهیم و مسیر حرکت متحرک است.

در واقع معادلات (1) معادلات پارامتری منحنی C در فضا هستند. یک منحنی در فضا به همین ترتیب می‌تواند به کمک فرم برداری

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

نمایش داده شود که در اینجا $\vec{r}(t)$ بردار مکانی موقعیت ذره در لحظه t می‌باشد.

توابع $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$ را توابع مؤلفه‌ای تابع برداری $\vec{r}(t)$ می‌نامیم.



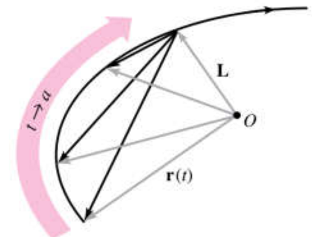
تعریف (حد یک تابع برداری)

فرض کنید $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$ یک تابع برداری باشد، در اینصورت

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \left[\lim_{t \to a} x(t)\right]\hat{i} + \left[\lim_{t \to a} y(t)\right]\hat{j} + \left[\lim_{t \to a} z(t)\right]\hat{k}$$

مشروط براینکه حدود $\lim_{t\to a} x(t)$ ، $\lim_{t\to a} y(t)$ ، $\lim_{t\to a} z(t)$ همگی موجود باشند.

درواقع اگر $\lim_{t\to a} \vec{r}(t)=\vec{L}$ ، دراینصورت $|\vec{r}(t)-\vec{L}|\to 0$ وقتی که $t\to 0$



تعریف (پیوستگی یک تابع برداری)

تابع برداری $\vec{r}(t)$ در t_1 پیوسته است اگر و تنها اگر:

1) $\vec{r}(t_1)$ موجود باشد.

2) $\lim_{t\to t_1} \vec{r}(t)$ وجود داشته باشد.

3) $\lim_{t\to t_1} \vec{r}(t)=\vec{r}(t_1)$

همچنین تابع برداری $\vec{r}(t)$ یک تابع پیوسته روی بازه I است هرگاه در هر نقطه از آن پیوسته باشد.

مثال: بازه پیوستگی تابع $\vec{r}(t)=t\hat{i}+\sqrt{t+1}\,\hat{j}+(t^2+1)\hat{k}$ را تعیین کنید.

توابع $x(t)=t$ و $z(t)=t^2+1$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته هستند. تابع $y(t)=\sqrt{t+1}$ برای $t\geq -1$ پیوسته است. بنابراین تابع $\vec{r}(t)$ روی بازه $[-1,\infty)$ پیوسته است.

تعریف (مشتق یک تابع برداری)

مشتق یک تابع برداری برابر است با

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

برای تمام t هایی که حد فوق موجود باشد. اگر $r'(t)$ وجود داشته باشد در اینصورت گوییم تابع برداری $\vec{r}(t)$ در t مشتق پذیر است. اگر $\vec{r}\,'(t)$ برای تمام t های متعلق به یک بازه باز I موجود باشد، در اینصورت $\vec{r}(t)$ را روی بازه I مشتق پذیر گوییم.

قضیه: اگر $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ و $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$ توابعی مشتق پذیر از t باشند، در اینصورت

$$r'(t) = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}$$

مثال: اگر $\vec{r}(t) = \sin(t)\hat{i} + Ln(t)\hat{j} + tg(t)\hat{k}$، در اینصورت مقدار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ را در $t = \frac{\pi}{3}$ بیابید.

حل:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \cos(t)\hat{i} + \frac{1}{t}\hat{j} + \sec^2(t)\hat{k}$$

$$r'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3}{\pi}\hat{j} + 4\hat{k}$$

قاعده زنجیره ای برای توابع برداری:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}$$

مثال: اگر $\vec{r}(t) = 2\hat{i} + \sin(t+1)\hat{j} + \sqrt{t}\,\hat{k}$ باشد، $\frac{d\vec{r}}{ds}$ را وقتی که $t = s^2 - 1$ بیابید.

حل: $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{dt}{ds} = (\cos(t+1)\,\hat{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\hat{k}) \times (2s)$

$$= (\cos(s^2)\,\hat{j} + \frac{1}{2\sqrt{s^2-1}}\,\hat{k}) \times 2s = 2s\cos(s^2)\,\hat{j} + \frac{s}{\sqrt{s^2-1}}\,\hat{k}$$

اگر $\vec{r}(t)$ حرکت یک ذره را توصیف کند، در اینصورت سرعت ذره، تندی و شتاب آن در زمان t بصورت زیر تعریف می‌شود:

سرعت ذره: $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$

تندی ذره در t: $v(t) = |\vec{v}(t)|$

شتاب ذره: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

مثال: منحنی $\vec{r} = t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j} + t^3\,\hat{k}$ را توصیف کرده و بردار سرعت و بردار شتاب این منحنی را در $(1,1,1)$ محاسبه کنید.

حل: با توجه به معادلات پارامتری: $x = t\ ,\ y = t^2\ ,\ z = t^3$

$\Rightarrow y = x^2\ ,\ z = x^3$

بنابراین این منحنی محل برخورد استوانه‌های $y = x^2$ و $z = x^3$ است.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i} + 2t\,\hat{j} + 3t^2 k$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\hat{j} + 6t\,k$$

نقطه $(1,1,1)$ نظیر زمان $t=1$ است. پس سرعت و شتاب در این نقطه برابر با

$$\vec{V}\Big|_{t=1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \quad , \quad \vec{a} = 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

مثال: سرعت، شتاب و تندی

$$\vec{r} = 3\cos(\omega t)\hat{i} + 4\cos(\omega t)\hat{j} + 5\sin(\omega t)\hat{k}$$

را بدست آورده و منحنی حرکت ذره‌ای که بردار مکانی موقعیت آن بصورت بالاست را توصیف نمایید.

حل:
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\omega\sin(\omega t)\hat{i} - 4\omega\sin(\omega t)\hat{j} + 5\omega\cos(\omega t)\hat{k}$$

$$v(t) = |\vec{V}(t)| = \sqrt{9\omega^2\sin^2(\omega t) + 16\omega^2\sin^2\omega(t) + 25\omega^2\cos^2(\omega t)}$$

$$= \sqrt{25\omega^2} = 5\omega$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = -3\omega^2\cos(\omega t)\hat{i} - 4\omega^2\cos(\omega t)\hat{j} - 5\omega^2\sin(\omega t)\hat{k}$$

$$= -\omega^2\vec{r}(t) \qquad (2)$$

با توجه به اینکه $|\vec{r}| = 5$ ، بنابراین این ذره روی یک کره به شعاع 5 حرکت می‌کند

$x^2+y^2+z^2 = 25$. از طرفی رابطه $x(t) = 3\cos(\omega t)$ و $y(t) = 4\cos(\omega t)$

بنابراین $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ یا $4x - 3y = 0$. لذا حرکت ذره روی صفحه $4x-3y=0$

است. بنابراین ذره روی یک دایره به شعاع 5 و مرکز مبداء مختصات در حرکت است.

رابطه (2) نشان می‌دهد که بردار شتاب در خلاف جهت بردار $\vec{r}(t)$ و همواره به سوی مرکز دایره است.

مثال ۵: ذره‌ای به سمت راست روی خم مسطح $y=x^2$ با تندی $v=5$ در حرکت است سرعت و شتاب این ذره را در نقطه (۱و۱) بیابید.

حل ۵: تا اینجا پارامتری کردن خم براساس زمان بود ولی گاهی مجبور به پارامتری سازی خم براساس مؤلفه‌های دیگری شویم. در اینجا خم را براساس $\underline{\underline{x}}$ پارامتری می‌کنیم:

$$\vec{r}(x)=x\hat{i}+x^2\hat{j}$$

که در اینجا x خود در واقع تابعی از زمان t است.

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+2x\frac{dx}{dt}\hat{j}$$

$$v=|\vec{V}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+4x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1+4x^2}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+4x^2}$$

(چون به سمت راست ذره حرکت می‌کند پس $\frac{dx}{dt}>0$)

$$\vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}+2x\frac{d^2x}{dt^2}\hat{j}+2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\hat{j}$$

$$=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)(\hat{i}+2x\hat{j})+2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\hat{j}$$

$$V=5=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+4x^2}\Longrightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}$$

اگر $x=1$، در اینصورت $\frac{dx}{dt}=\frac{5}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$ ، بنابراین

$$V=\sqrt{5}\,\hat{i}+2\sqrt{5}\,\hat{j}$$

از طرفی:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{\frac{-5\times 8x}{2\sqrt{1+4x^2}}}{(1+4x^2)}\times\underbrace{\frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}}_{\frac{dx}{dt}}=-\frac{100x}{(1+4x^2)^2}$$

$$x=1\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{100}{5^2}=-4\quad\Rightarrow\vec{a}=-4(i+2j)+10\hat{j}$$
$$=-4\hat{i}+2\hat{j}$$

قواعد مشتق گیری از توابع برداری:

فرض کنید $\vec{u}(t)$ و $\vec{v}(t)$ توابع برداری مشتق پذیر و $\lambda(t)$ تابع اسکالر مشتق پذیری باشند. دراینصورت $\vec{u}(t)+\vec{v}(t)$ ، $\lambda(t)\vec{u}(t)$ ، $\vec{u}(t).\vec{v}(t)$ ، $\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)$ و $\vec{u}(\lambda(t))$ همگی توابع مشتق پذیر هستند که:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t)+\vec{v}(t))=\vec{u}'(t)+\vec{v}'(t)$

2) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{u}(t))=\lambda'(t)\vec{u}(t)+\lambda(t)\vec{u}'(t)$

3) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t).\vec{v}(t))=\vec{u}'(t).\vec{v}(t)+\vec{u}(t).\vec{v}'(t)$

4) $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t))=u'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{v}'(t)\times\vec{u}(t)$

و اگر $\vec{u}(t)\neq\vec{o}$ دراینصورت

$$\frac{d}{dt}|\vec{u}(t)|=\frac{u(t).u'(t)}{|u(t)|}$$

مثال: نشان دهید که تندی یک ذره متحرک روی یک بازه زمانی ثابت باقی می‌ماند اگر و تنها اگر بردار شتاب بر بردار سرعت در این بازه عمود باشد.

$$|v(t)|^2 = \vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)$$

$$0 = \vec{v}'(t)\cdot v(t) + v(t)\cdot \underbrace{v'(t)}_{\vec{a}} = 2\,\vec{a}(t)\cdot v(t)$$

$$2v(t)\,\frac{dv}{dt}$$

بردار شتاب و سرعت بر هم عمودند $\Rightarrow \vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0$

تذکر: در حالت کلی می‌توان نشان داد اگر طول یک تابع برداری در یک بازه ثابت باشد این تابع بر مشتق آن در طول بازه عمود است.

تعریف (منحنی هموار)

خم پارامتری یک خم که توسط تابع برداری

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,k$$

نمایش داده می‌شود را روی بازه باز I هموار گوییم هرگاه توابع $x'(t)$ ، $y'(t)$ ، $z'(t)$ توابعی پیوسته روی I باشند و برای هر $t\in I$ ، $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$

مثال: فواصلی که تابع برداری

$$\vec{r}(t) = (5\cos(t) - \cos(5t))\,\hat{i} + (5\sin(t) - \sin(5t))\,\hat{j}$$

و $0 \le t \le 2\pi$ روی آن هموار هستند را بیابید.

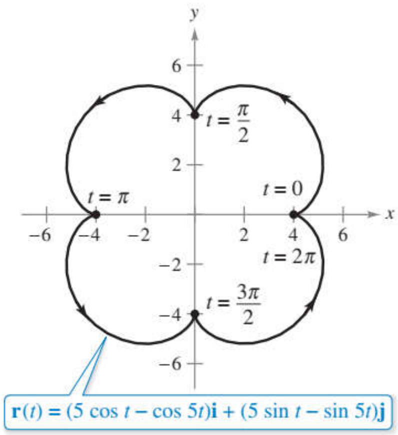
حل: $\vec{r}'(t) = (-5\sin(t) + 5\sin(5t))\,\hat{i} + (5\cos(t) - 5\cos(5t))\,\hat{j}$

$$\vec{r}'(t) = \vec{0} = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j}$$

$$-5\sin(t) + 5\sin(5t) = 0$$
$$5\cos(t) - 5\cos(5t) = 0$$

$$t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$$

$$(0, \tfrac{\pi}{2}),\ (\tfrac{\pi}{2}, \pi),\ (\pi, \tfrac{3\pi}{2}),\ (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi)$$



پارامتری کردن یک منحنی:

مثال: معادله پارامتری منحنی که از تقاطع صفحه $x+y=1$ و $z=x^2+y^2$ ایجاد می‌شود را بیابید.

حل: $t=x \Rightarrow y=1-x=1-t$ (با توجه به معادله صفحه)

$$z=x^2+y^2=t^2+(1-t)^2=t^2+t^2-2t+1=2t^2-2t+1$$

$$\vec{r}=t\,\hat{i}+(1-t)\,\hat{j}+(2t^2-2t+1)\,\hat{k}$$

حال یک معادله پارامتری دیگر از این خم را بدست می‌آوریم:

$$t=y \Rightarrow x=1-y=1-t \ , \quad z=(1-t)^2+t^2=2t^2-2t+1$$

$$\vec{r}(t)=(1-t)\,\hat{i}+t\,\hat{j}+(2t^2-2t+1)\,\hat{k}$$

نتیجه: معادله پارامتری یک خم منحصر بفرد نیست.

مثال: معادله پارامتری خمی که از تقاطع رویه‌های $xy+z=1$ و $x^2+y+z=2$ بدست می‌آید را بیابید.

① $xy+z=1$

② $x^2+y+z=2$

$$\xRightarrow{②-①} x^2+y-xy=1$$

حال اگر $t=x$، $t^2+y-ty=1$، پس

$$y(1-t)=1-t^2 \Rightarrow y=\frac{1-t^2}{1-t} \qquad t\neq 1 \Rightarrow y=1+t$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} z = 1 - xy \Rightarrow z = 1 - t(1+t) = 1 - t - t^2$$

$$\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + (1+t)\,\hat{j} + (1 - t - t^2)\,\hat{k}$$

مثال: معادله پارامتری خمی که از تقاطع صفحه $x+2y+4z=4$ با استوانه $x^2+4y^2=4$ را بیابید.

حل: با توجه به معادله استوانه $x^2+4y^2=4$ داریم:

$$x = 2\cos(t) \quad , \quad y = \sin(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

از طرفی با توجه به معادله صفحه $x+2y+4z=4$ داریم:

$$z = \frac{1}{4}(4 - x - 2y) = \frac{1}{4}(4 - 2\cos(t) - 2\sin(t))$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))$$

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\,\hat{i} + \sin(t)\,\hat{j} + \left(1 - \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))\right)\hat{k}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

تعریف (طول قوس):

اگر C یک منحنی هموار که توسط تابع برداری $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$ روی بازه $[a,b]$ نمایش داده می‌شود باشد، در اینصورت طول قوس این خم در این بازه برابر است با:

$$S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_a^b |r'(t)|\, dt = \int_a^b \underbrace{v(t)}_{\text{تندی}}\, dt$$

مثال: طول قوس خم داده شده با

$$\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\,\hat{j} + \frac{1}{2}t^2\,\hat{k}$$

از $t=0$ تا $t=2$ را بیابید.

$$S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + (2t^{\frac{1}{2}})^2 + (t)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3}\ dt \qquad u = t+2 \Rightarrow du = dt$$

$$= \int_2^4 \sqrt{u^2 - 3}\, du$$

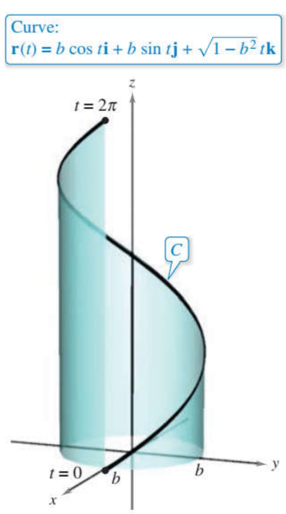
$$= \left[\frac{t+2}{2} \sqrt{(t+2)^2 - 3} - \frac{3}{2} Ln \left| (t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 3} \right| \right|_0^2$$

$$= 2\sqrt{13} - \frac{3}{2} Ln(4 + \sqrt{13}) - 1 + \frac{3}{2} Ln(3)$$

مثال: طول قوس یک دور از حرکت مارپیچ

$$\vec{r}(t) = b\cos(t)\,\hat{i} + b\sin(t)\,\hat{j} + \sqrt{1-b^2}\ t\,\hat{k}$$

را بیابید.



$$\vec{r}'(t) = -b\sin(t)\,\hat{i} + b\cos(t)\,\hat{j} + \sqrt{1-b^2}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{b^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t) + 1 - b^2} = 1$$

$$S = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

تعریفِ (تابع طول قوس)

تابع طول قوس را بصورت زیرِ تعریفِ می کنیم:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z(u)]^2}\, du$$

پارامتری کردن یکِ منحنی برحسب طول قوس:

اگر بتوان تابع طول قوس منحنی که توسط تابع برداری

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

بیان می شود را محاسبه کرد و سپس از ضابطه $S = S(t)$ ، بتوان t را برحسب $\underline{\underline{s}}$ نوشت $t = t(s)$ در اینصورت معادله پارامتری منحنی برحسب طول قوس به صورت زیرِ مشخص می شود:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$$

مثال: مارپیچ مستدیر $\vec{r} = a\cos(t)\,\hat{i} + a\sin(t)\,\hat{j} + bt\,\hat{k}$ را درنظر گرفته و معادله پارامتری آن را برحسب طول قوس بدست آورید.

$$S = S(t) = \int_0^{t} \sqrt{(-a\sin(t))^2 + (a\cos(t))^2 + b^2}\, dt = \int_0^{t} \sqrt{a^2+b^2}\, dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

$$\Rightarrow t = \frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \vec{r}(s) = a\cos\left(\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + a\sin\left(\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + b\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{k}$$

تذکر 1 : معادله پارامتری یک خم برحسب طول قوس به هندسه مسیر بستگی دارد.

تذکر 2 : $\frac{ds}{dt} = v(t) = |r'(t)| > 0$

تذکر 3 : $r(s)$ را پارامتر طبیعی خم C می‌نامند. به سادگی می‌توان نشان داد که سرعت این فرم پارامتری از خم C همه‌جا برابر یک است.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \hat{T} \longrightarrow$$ بردار یکه مماس

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$$

کنج فرنه : بردار $\hat{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ در نقطه $r(s)$ بر منحنی C مماس است و طول آن برابر یک است. این بردار را بردار یکه مماس بر منحنی می‌نامیم. بعلاوه جهت این بردار در راستای ازدیاد پارامتر s می‌باشد. چون اندازه $\hat{T}(s)$ همواره برابر یک است. بنابراین همانطور که قبلاً دیدیم بر مشتقش عمود است، یعنی

$$\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0$$

بردار یکه

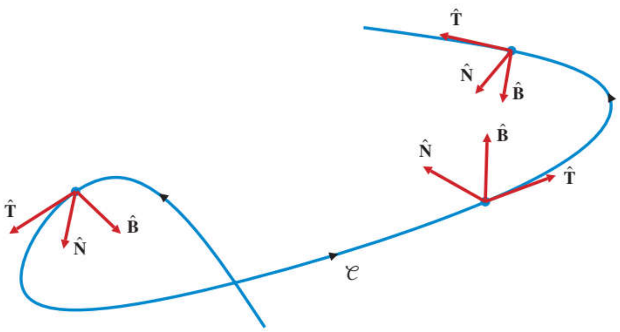
$$\hat{N}(s) = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}$$

را بردار قائم اصلی منحنی C در نقطه $\vec{r}(s)$ می‌نامیم که بر منحنی C در $\vec{r}(s)$ عمود است و به سمت انحنای منحنی قرار دارد. بردار یکه

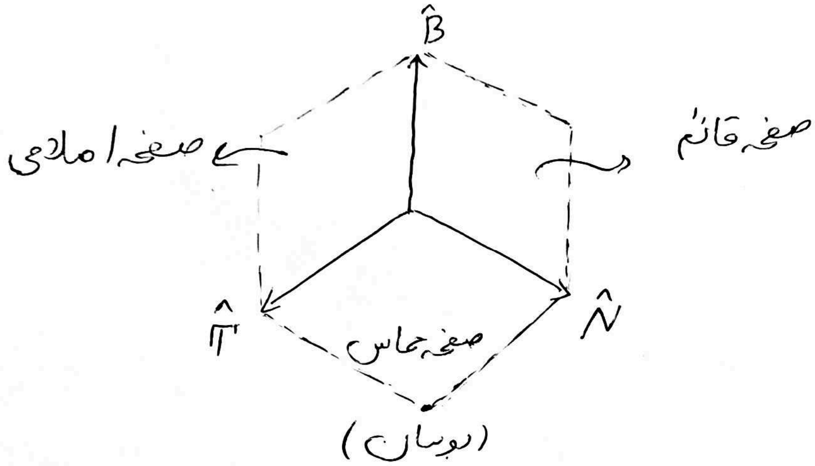
$$\hat{B}(s) := \hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$$

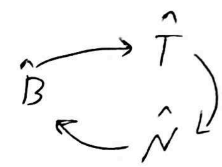
را بردار قائم دوم منحنی C در $\vec{r}(s)$ می‌نامیم. در هر نقطه $\vec{r}(s)$ از منحنی C، سه بردار $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ یک پایه متعامد یکه راستگرد را تشکیل می‌دهد. این پایه متعامد را کنج فرنه

منحنی C در $r(s)$ می‌نامیم.



توجه داشته باشید که $\hat{N}\times\hat{B}=\hat{T}$ و $\hat{B}\times\hat{T}=\hat{N}$





مثال: فرض کنید $\vec{r}(t)=3\sin t\,\hat{i}+3\cos t\,\hat{j}+4t\,\hat{k}\ ,\ -\pi\leq t\leq\pi$ باشد. در اینصورت:

$$S(t)=\int_{-\pi}^{t}\sqrt{(3\cos(t))^2+(-3\sin(t))^2+16}\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{t}5\,dt=5(t+\pi)\Rightarrow t=\frac{s}{5}-\pi$$

$$\Rightarrow \vec{r}(s)=3\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{i}+3\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{j}+4\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{k}$$

$$\hat{T}(s)=\vec{r}\,'(s)=\frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{i}-\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{j}+\frac{4}{5}\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds}=-\frac{3}{25}\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{i}-\frac{3}{25}\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{j}$$

$$\hat{N}(s)=\frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}=-\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{i}-\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{j}$$

$$\hat{B}(s)=\hat{T}(s)\times\hat{N}(s)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right) & -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right) & \frac{4}{5}\\ -\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right) & -\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right) & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{i}-\frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}-\pi\right)\hat{j}-\frac{3}{5}\hat{k}$$

تذکر: بدون پارامتری کردن خم برحسب طول قوس نیز می‌توان کنج فرنه را برای هر پارامتری‌سازی از منحنی به کمک قضیه زیر محاسبه کرد.

قضیه: اگر $\vec{r}(t)$ یک تابع برداری باشد، دراینصورت:

$$\hat{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\quad,\quad \hat{B}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)|}$$

$$\hat{N}(t)=\hat{B}(t)\times\hat{T}(t)$$

مثال: کنج فرنه منحنی مثال قبل را بدون استفاده از پارامتر طبیعی محاسبه کنید:

$$\vec{r}\,'(t)=3\cos(t)\,\hat{i}-3\sin(t)\,\hat{j}+4\hat{k}$$

$$\vec{r}\,''(t)=-3\sin(t)\,\hat{i}-3\cos(t)\,\hat{j}$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3\cos(t) & -3\sin(t) & 4\\ -3\sin(t) & -3\cos(t) & 0\end{vmatrix}=12\cos(t)\,\hat{i}-12\sin(t)\,\hat{j}-9\,\hat{k}$$

$$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{9\cos^2(t)+9\sin^2(t)+16}=5$$

$$|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|=\sqrt{144\cos^2(t)+144\sin^2(t)+81}=15$$

$$\hat{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\frac{3}{5}\cos(t)\,\hat{i}-\frac{3}{5}\sin(t)\,\hat{j}+\frac{4}{5}\hat{k}$$

$$\hat{B}=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}=\frac{4}{5}\cos(t)\,\hat{i}-\frac{4}{5}\sin(t)\,\hat{j}-\frac{3}{5}\hat{k}$$

$$\hat{N}=\hat{B}(t)\times\hat{T}(t)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{3}{5}\cos(t) & -\frac{3}{5}\sin(t) & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5}\cos(t) & -\frac{4}{5}\sin(t) & -\frac{3}{5}\end{vmatrix}=-\sin(t)\,\hat{i}+\cos(t)\,\hat{j}$$

مثال: فرض کنید

$$\vec{r}(t)=(5+4\cos\pi t)\,\hat{i}+4\sin(\pi t)\,\hat{j}+3\pi t\,\hat{k}$$

ابتدا کنج فرنه منحنی فوق را در $(1, 0, 3\pi)$ بدست آورده و سپس معادله خط مماس، صفحه قائم، صفحه اصلاحی و صفحه مماس در این نقطه را محاسبه کنید.

$t=1$

$$\vec{r}\,'(t) = -4\pi \sin(\pi t)\,\hat{i} + 4\pi \cos(\pi t)\,\hat{j} + 3\pi\,\hat{k}$$

$$r''(t) = -4\pi^2 \cos(\pi t)\,\hat{i} - 4\pi^2 \sin(\pi t)\,\hat{j}$$

$$\hat{T}(1) = \frac{\vec{r}\,'(1)}{|r'(1)|} = \frac{-4\pi\hat{j} + 3\pi\hat{k}}{\sqrt{16\pi^2+9\pi^2}} = -\frac{4}{5}\hat{j} + \frac{3}{5}\hat{k}$$

$$\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4\pi & 3\pi \\ 4\pi^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 12\pi^3\hat{j} + 16\pi^3 k$$

$$\hat{B}(1) = \frac{\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1)}{|\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1)|} = \frac{3}{5}\hat{j} + \frac{4}{5}\hat{k}$$

$$\hat{N}(1) = \hat{B}(1) \times \hat{T}(1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \hat{i}$$

معادله خط مماس : $x=1$, $y=0-\frac{4}{5}t$, $z=3\pi+\frac{3}{5}t$

صفحه قائم : $0(x-1) - \frac{4}{5}(y-0) + \frac{3}{5}(z-3\pi) = 0$

$$3z = 4y + 9\pi$$

صفحه مماس : $0(x-1) + \frac{3}{5}(y-0) + \frac{4}{5}(z-3\pi) = 0$

$$3y + 4z = 12\pi$$

صفحه اصلاحی : $1\,(x-1)+0\,(y-0)+0\,(z-3\pi)=0$

$$x=1$$

تعریف: انحناء منحنی C در نقطه $\vec{r}(s)$ را اندازه $\frac{d\hat{T}}{ds}$ تعریف کرده و با k نمایش می دهیم.

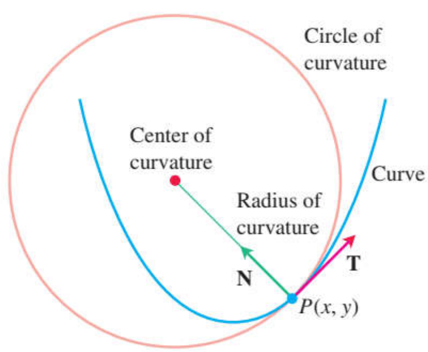
$$k(s)=\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$$

همچنین شعاع انحناء را با حرف یونانی ρ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\rho(s)=\frac{1}{k(s)}$$

تعریف (دایره مماس یا دایره بوسان)

دایره‌ای به مرکز $\vec{r}(s)+\rho\hat{N}(s)$ و به شعاع ρ را دایره مماس در نقطه $\vec{r}(s)$ می نامیم.



تذکر: اگر $\vec{r}(t)$ معادله برداری منحنی C باشد:

$$k(t)=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

مثال: اگر $\vec{r}(t)=(2t+3)\hat{i}+(5-t^2)\hat{j}$ معادله دایره مماس به منحنی داده شده را در نقطه $(5,4)$ بدست آورید.

t = ۲

$$\vec{r}'(t)=2\hat{i}-2t\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{r}''(t)=-2\hat{j}$$

$$\vec{r}'(1)=2\hat{i}-2\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{r}''(1)=-2\hat{j}$$

$$\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{k}$$

$$\hat{T}(1) = \frac{\vec{r}\,'(1)}{|\vec{r}\,'(1)|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{j}$$

$$\hat{B}(1) = \frac{\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1)}{|\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1)|} = -\hat{k}$$

$$\hat{N}(1) = \hat{B}(1) \times \hat{T}(1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{j}$$

$$\hat{k}(1) = \frac{|\vec{r}\,'(1) \times \vec{r}\,''(1)|}{|\vec{r}\,'(1)|^3} = \frac{4}{(2\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

شعاع انحناء $\rho = \dfrac{1}{k(1)} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

مرکز انحناء $\vec{r}(1) + \rho\,\hat{N}(1) = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{j}\right) = \hat{i}$

$$(x-1)^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 31$$

تذکر: نقطه $\vec{r}(s) + \rho\,\hat{N}(s)$ مرکز انحناء منحنی C در نقطه $\vec{r}(s)$ نامیده می‌شود.

تاب : چون $|\hat{B}(s)|=1$ لذا

$$\hat{B}(s)\cdot\hat{B}(s)=0 \Rightarrow \hat{B}(s)\cdot\frac{d\hat{B}}{ds}=0$$

لذا $\hat{B}(s)$ بر $\frac{d\hat{B}}{ds}$ عمود است. از طرفی $\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}$ پس

$$\frac{d\hat{B}}{ds}=\frac{d\hat{T}}{ds}\times\hat{N}+\hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds}=k\underbrace{\hat{N}\times\hat{N}}_{0}+\hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$=\hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds}$$

پس $\frac{d\hat{B}}{ds}$ بر T نیز عمود است، لذا $\frac{d\hat{B}}{ds}$ باید موازی $\hat{N}$ باشد.

تعریف : روی هر بازه ای که $k(s)\neq 0$ تابعی چون $\tau(s)$ موجود است که

$$\frac{d\hat{B}}{ds}=-\tau(s)\hat{N}(s)$$

$\tau(s)$ را تاب منحنی C، $\vec{r}(s)$ می گوییم.

تذکر : تاب هر منحنی مسطحه برابر صفر است (منحنی مسطحه، منحنی است که روی یک صفحه قرار داشته باشد). اگر تاب مثبت باشد، صفحه بوسان منحنی در جهت $\hat{B}(t)$ حرکت می کند و اگر منفی باشد در جهت خلاف $\hat{B}(t)$ حرکت می کند.

تاب را بدون داشتن پارامتر طبیعی خم (برحسب طول قوس) به کمک قضیه زیر می توان محاسبه کرد:

قضیه : اگر C منحنی تابع برداری $\vec{r}(t)$ باشد، در اینصورت

$$\tau(t)=\frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}$$