مثال : انحناء، تاب و کنج فرنه هر نقطه از منحنی $\vec{r}(t)=(t+\cos t)\hat{i}+(t-\cos(t))\hat{j}+\sqrt{2}\sin t\,\hat{k}$ را بیابید.

$$\vec{r}\,'(t)=(1-\sin(t))\hat{i}+(1+\sin(t))\hat{j}+\sqrt{2}\cos t\,\hat{k}$$

$$\vec{r}\,''(t)=-\cos t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}-\sqrt{2}\sin t\,\hat{k}$$

$$\vec{r}\,'''(t)=\sin t\,\hat{i}-\sin t\,\hat{j}-\sqrt{2}\cos t\,\hat{k}$$

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1-\sin t & 1+\sin t & \sqrt{2}\cos t\\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2}\sin t\end{vmatrix}=-\sqrt{2}(1+\sin t)\hat{i}$$

$$-\sqrt{2}(1-\sin t)\hat{j}+2\cos t\,\hat{k}$$

$$(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'').\vec{r}\,'''=\begin{vmatrix}1-\sin(t) & 1+\sin(t) & \sqrt{2}\cos(t)\\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2}\sin(t)\\ \sin t & -\sin t & -\sqrt{2}\cos(t)\end{vmatrix}$$

$$=(1-\sin t)\left[-\sqrt{2}\cos^2(t)-\sqrt{2}\sin^2(t)\right]-(1+\sin t)\left[\sqrt{2}\cos^2(t)+\sqrt{2}\sin^2(t)\right]$$

$$+\sqrt{2}\cos t\left[\sin t\cos t-\sin t\cos t\right]$$

$$=-\sqrt{2}(1-\sin t)-\sqrt{2}(1+\sin t)=-2\sqrt{2}$$

$$k(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

که در آن :

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 - 2\sin(t) + \sin^2 t + 1 + 2\sin t + \sin^2(t) + 2\cos^2(t)}$$

$$= \sqrt{2\sin^2(t) + 2\cos^2(t) + 2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{2(1+\sin t)^2 + 2(1-\sin t)^2 + 4\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{4 + 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$k(t) = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{1}{2}(1 - \sin(t))\hat{i} + \frac{1}{2}(1 + \sin(t))\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\hat{k}$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} = -\frac{1}{2}(1 + \sin t)\hat{i} - \frac{1}{2}(1 - \sin t)\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\hat{k}$$

$$\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\hat{j} - \sin t\,\hat{k}$$

مثال: نشان دهید که منحنی

$$\vec{r}(t)=(3t-1)\hat{i}+(2t^2+t+1)\hat{j}+(t^2-2t)\hat{k}$$

یک منحنی مسطح است.

$$\vec{r}'(t)=3\hat{i}+(4t+1)\hat{j}+(2t-2)\hat{k}$$

$$\vec{r}''(t)=4\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\tau(t)=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4t+1 & 2t-2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|^2}=0$$

$$\vec{r}'''(t)=\vec{0}$$

استخراج فرمولهای کنج فرنه برای پارامتری سازی کلی:

قبلاً در فضا یابی نحوهٔ محاسبه کنج فرنه، انحنا و تاب برای منحنی پارامتری $\vec{r}(t)$ ارائه کردیم

اکنون می‌خواهیم روابط ارائه شده در فضا را اثبات نماییم

$$\vec{r}'(t)=\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}=v(t)\,\hat{T}$$

$$\vec{r}''(t)=\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{T}+v\frac{d\hat{T}}{dt}$$

$$=\frac{dv}{dt}\hat{T}+v\frac{d\hat{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{T}+v^2k\hat{N}$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=v\frac{dv}{dt}\hat{T}\times\hat{T}+v^3k\,\hat{T}\times\hat{N}=v^3k\hat{B}$$

با توجه به فرمول بالا $\hat{B}$ بردار جهت $\vec{V}\times\vec{a}$ است.

با توجه به فرمولهای بالا

$$\hat{T}=\frac{\vec{V}}{v}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}\,,\quad k=\frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{v^3}$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{v}\times\vec{a}}{|\vec{v}\times\vec{a}|} = \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|} \quad و \quad \hat{N} = \hat{B}\times\hat{T}$$

تذکر: گاهی محاسبه $\hat{N}$ به کمک فرمول زیر مناسب تر است.

$$\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|$$

برای محاسبه تاب ابتدا $\frac{d\vec{a}}{dt}$ را محاسبه می کنیم:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2 k\hat{N}\right)$$

اگر از عبارت فوق مشتق بگیریم، چندین جمله ایجاد می شود که فقط یکی شامل $\hat{B}$ است و آن جمله ای است که با محاسبه مشتق $v^2 k\left(\frac{d\hat{N}}{dt}\right)$ بدست می آید:

$$v^2 k\left(\frac{d\hat{N}}{dt}\right) = v^2 k \frac{d\hat{N}}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = v^3 k \frac{d\hat{N}}{ds} \qquad \star$$

از طرفی

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = \frac{d(\hat{B}\times\hat{T})}{ds} = \frac{d\hat{B}}{ds}\times\hat{T} + \hat{B}\times\frac{d\hat{T}}{ds}$$

$$= -\tau\hat{N}\times\hat{T} + k\hat{B}\times\hat{N}$$

$$= \tau\hat{B} - k\hat{T}$$

لذا ($\star$) برابر است با

$$v^3 k\left(\tau\hat{B} - k\hat{T}\right)$$

پس

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lambda\hat{T} + \mu\hat{N} + v^3 k\tau\hat{B}$$

$$(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} = (v^3k)^2\tau = |\vec{v}\times\vec{a}|^2\tau$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot(d\vec{a}/dt)}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}$$

مؤلفه های مماسی و قائم شتاب:

همانطور که دیدیم: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2k\hat{N}$

لذا مؤلفه عددی مماس برابر است با $\frac{dv}{dt}$ و مؤلفه عددی قائم شتاب هم برابر است با v^2k.

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad و \quad a_N = kv^2$$

توجه کنید که $a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - \vec{a}_T^2}$.

$$a_N = kv^2 = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v^3}\cdot v^2 = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v} = \frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$a_T = \vec{a}\cdot\hat{T} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|}.$$

مثال: مولفه مماسی و قائم شتاب متحرکی که حرکت آن به کمک تابع برداری $\vec{r}(t) = 3t\hat{i} - t\hat{j} + t^2\hat{k}$ مشخص می شود را بیابید:

$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = 3\hat{i} - \hat{j} + 2t\hat{k}$ $\qquad |\vec{v}(t)| = \sqrt{9+1+4t^2} = \sqrt{10+4t^2}$

$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = 2\hat{k}$

$\vec{v}\cdot\vec{a} = 4t \Rightarrow a_T = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|} = \frac{4t}{\sqrt{10+4t^2}}$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 6\hat{j}$$

$$a_N = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{4+36}}{\sqrt{10+4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10+4t^2}}$$

روش دوم محاسبه a_N:

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2} = \sqrt{4 - \frac{16t^2}{10+4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10+4t^2}}$$