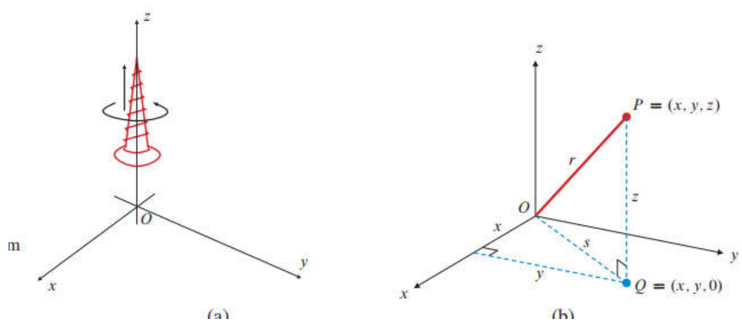
بردارها:

تعریف: مجموعه تمام سه تایی های مرتب از اعداد حقیقی را فضای اقلیدسی نامیده و با $\mathbb{R}^{۳}$ نمایش می دهیم:

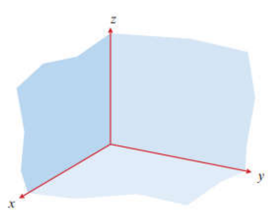
$$\mathbb{R}^{۳} = \left\{(x,y,z)\middle| x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$$

بنابراین هر نقطه در فضای $\mathbb{R}^{۳}$ یک سه تایی مرتب مانند $P=(x_{۰},y_{۰},z_{۰})$ است.

دستگاه مختصات راستگرد و نمایش نقاط در آن:



همانطورکه محور x و y صفحه را به ۴ ربع تقسیم می‌کرد، صفحات xy ، xz ، و yz فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند. به ناحیه ای‌که در آن $x \geq ۰, y \geq ۰, z \geq ۰$ یک هشتم اول می‌گوییم.



فاصله دو نقطه از هم: فاصله دو نقطه $P_{۱}=(x_{۱},y_{۱},z_{۱})$ و $P_{۲}=(x_{۲},y_{۲},z_{۲})$ برابر است با:

$$\left|P_{۱}P_{۲}\right| = \sqrt{(x_{۲}-x_{۱})^{۲}+(y_{۲}-y_{۱})^{۲}+(z_{۲}-z_{۱})^{۲}}$$

بردار: بردار $\overrightarrow{PQ}$ پاره خطی جهت دار است‌که نقطه P را به نقطه Q وصل می‌کند. نقطه P را نقطه ابتدایی و نقطه Q را نقطه انتهایی بردار می‌گویند. دو بردار را همسنگ میگوییم هرگاه هم جهت و هم اندازه باشند. برای هر بردار مانند $\overrightarrow{P_{۱}P_{۲}}$ در فضا یک بردار همسنگ با نقطه ابتدایی مبدا مختصات دکارتی وجود داردکه آن را با $\overrightarrow{OC}$ نمایش می‌دهیم و $C=(x_{۲}-x_{۱},y_{۲}-y_{۱},z_{۲}-z_{۱})$. بر این اساس تعریف زیر را داریم:

تعریف: یک بردار در فضا یک سه تایی مرتب مانند $\vec{v}=<v_۱,v_۲,v_۳>$ است. بردار صفر هم به صورت $\vec{v}=<۰,۰,۰>$ تعریف می شود.

اندازه بردار $\vec{u}=<u_۱,u_۲,u_۳>$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{u_۱^۲+u_۲^۲+u_۳^۲}$$

به عنوان مثال اگر $\vec{u}=<۱,۲,۲>$ در این صورت:

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{۱^۲+۲^۲+۲^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

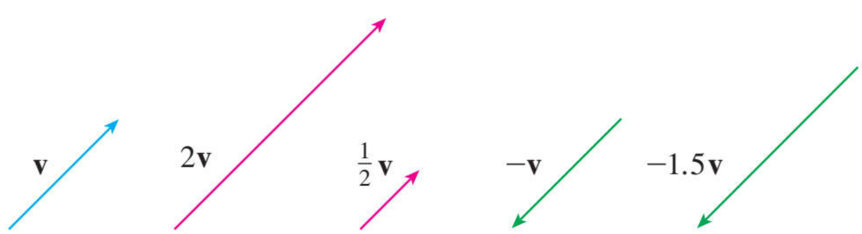
تعریف: جمع دو بردار $\vec{u}=<u_۱,u_۲,u_۳>$ و $\vec{v}=<v_۱,v_۲,v_۳>$ برداری است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{u}+\vec{v}=<u_۱+v_۱,u_۲+v_۲,u_۳+v_۳>$$

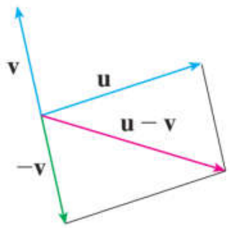
به لحاظ هندسی جمع دو بردار را می توان به کمک قانون متوازی الاضلاع به دست آورد:

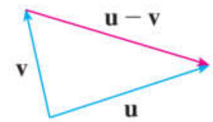
ضرب بردار در عدد: اگر c یک عدد ثابت و $\vec{v}$ یک بردار باشد ضرب $c\vec{v}$ برداری است که طول آن $|c|$ برابر بردار $\vec{v}$ است و اگر $c>۰$ همجهت با آن و اگر $c<۰$ در خلاف جهت $\vec{v}$ است. اگر $c=۰$ یا $\vec{v}=۰$ در اینصورت $c\vec{v}=\vec{۰}$.

$$c\vec{v}=c<v_۱,v_۲,v_۳>=<cv_۱,cv_۲,cv_۳>$$



قرینه بردار: قرینه بردار $\vec{v}$ بردار $-\vec{v}$ است که طول آن با بردار $\vec{v}$ برابر است ولی جهت آن خلاف جهت بردار $\vec{v}$ است.
تفریق: $\vec{u}-\vec{v}$ را به صورت $\vec{u}+(-\vec{v})$ تعریف می کنیم. یعنی از نظر هندسی ابتدا بردار $-\vec{v}$ را رسم کرده و سپس آن را با بردار $\vec{u}$ جمع می کنیم. راه دیگر این است که چون $\vec{v}+(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}$ ابتدای دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را یکی گرفته در این صورت $\vec{u}-\vec{v}$ برداری است که انتهای $\vec{v}$ را به انتهای $\vec{u}$ وصل می کند.





بردار یکه: بردار $\vec{u}$ را یک بردار یکه گوییم هرگاه $|\vec{u}| = ۱$. اگر $\vec{u} \neq ۰$ در این صورت با تقسیم کردن آن بر اندازه اش می توان برداری یکه ساخت که با $\vec{u}$ همجهت است و آنرا بردار **جهت** $\vec{u}$ می نامند وبا $\hat{u}$ نمایش می دهند.

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

به عنوان مثال اگر $\vec{u} =< ۱,۲,۲ >$ در این صورت:

$$\hat{u} = \frac{< ۱,۲,۲ >}{۳} =< \frac{۱}{۳}.\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳} >$$

به کمک بردارهای یکه استاندارد

$$\hat{i} =< ۱,۰,۰ >, \hat{j} =< ۰,۱,۰ >, \hat{k} =< ۰,۰,۱ >$$

هر بردار مانند $\vec{u} =< u_۱, u_۲, u_۳ >$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{u} = u_۱\hat{i} + u_۲\hat{j} + u_۳\hat{k}$$

به عنوان مثال:

$$< -۱,۰,۳ >= -\hat{i} + ۳\hat{k}$$
$$< ۲,-۵,۶ >= ۲\hat{i} - ۵\hat{j} + ۶\hat{k}$$

تعریف: دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را موازی گوییم هرگاه عددی چون c موجود باشد که $\vec{u} = c\vec{v}$.

ضرب داخلی: اگر $\vec{u} =< u_۱, u_۲, u_۳ >$ و $\vec{v} =< v_۱, v_۲, v_۳ >$ در این صورت ضرب داخلی این دو بردار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{u}.\vec{v} = u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + u_۳v_۳$$

مثال:

$$\vec{u} = ۲\hat{i} + ۳\hat{j} - ۲\hat{k}$$
$$\vec{v} = ۴\hat{i} - ۳\hat{j} + ۵\hat{k}$$
$$\vec{u}.\vec{v} = ۸ - ۹ - ۱۰ = -۱۱$$

قضیه: اگر θ زاویه بین بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد در این صورت:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

نتیجه: اگر θ زاویه بین بردار های ناصفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

نتیجه: دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامد هستند هرگاه :

$$\vec{u}.\vec{v} = ۰$$

مثال: زاویه بین بردار های $\vec{u} =< ۳, -۱, ۲ >$ و $\vec{v} =< ۱, -۱, -۲ >$ را محاسبه نمایید:

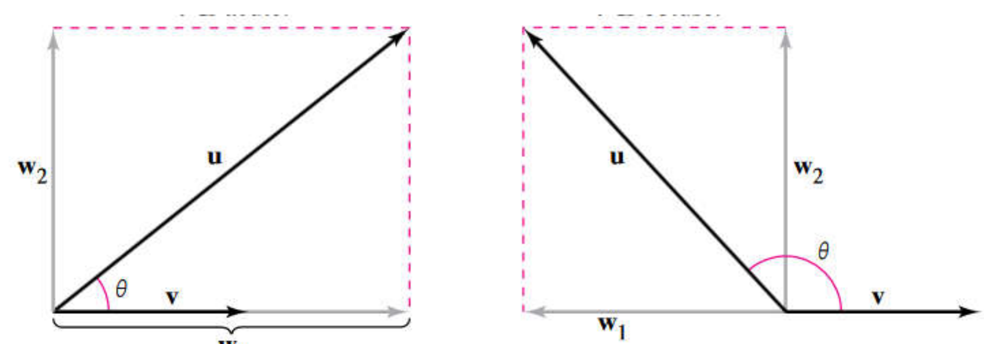
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{۳ + ۱ - ۴}{\sqrt{۱۴}\sqrt{۶}} = ۰$$

بنابر این $\theta = \frac{\pi}{۲}$.

تعریف: بردار های ناصفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در نظر بگیرید.همچنین فرض کنید

$$\vec{u} = \vec{w}_۱ + \vec{w}_۲$$

که $\vec{w}_۱$ برداری موازی با $\vec{v}$ و $\vec{w}_۲$ برداری عمود بر $\vec{v}$ است. $\vec{w}_۱$ را تصویر بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ گوییم و با $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ نمایش می دهیم. همچنین $\vec{w}_۲$ را مؤلفه بردار $\vec{u}$ عمود بر $\vec{v}$ می نامیم $\vec{w}_۲ = \vec{u} - \vec{w}_۱$.



می توان نشان داد:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\hat{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^۲}\vec{v}$$

مثال: اگر $\vec{u} = ۳\hat{i} - ۵\hat{j} + ۲\hat{k}$ و $\vec{v} = ۷\hat{i} + \hat{j} - ۲\hat{k}$ تصویر بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ را به دست آورید.

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{۷^۲ + ۱^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۵۴}$$
$$\vec{u}.\vec{v} = ۳ \times ۷ + ۱ \times (-۵) - ۲ \times ۲ = ۱۲$$
$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^۲}\vec{v} = \frac{۱۲}{۵۴} < ۷,۱,-۲ >= \frac{۱۴}{۹}\hat{i} + \frac{۲}{۹}\hat{j} - \frac{۴}{۹}\hat{k}$$

تعریف (ضرب برداری): فرض کنید $\vec{u} = u_۱\hat{i} + u_۲\hat{j} + u_۳\hat{k}$ و $\vec{v} = v_۱\hat{i} + v_۲\hat{j} + v_۳\hat{k}$ دو بردار در فضا باشند. ضرب خارجی بردار $\vec{u}$ در بردار $\vec{v}$ برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_۱ & u_۲ & u_۳ \\ v_۱ & v_۲ & v_۳ \end{vmatrix}$$

مثال: ضرب خارجی بردار $\vec{u} = \hat{i} - ۲\hat{j} + \hat{k}$ در $\vec{v} = ۳\hat{i} + \hat{j} - ۲\hat{k}$ را بیابید.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۳\hat{i} + ۵\hat{j} + ۷\hat{k}$$

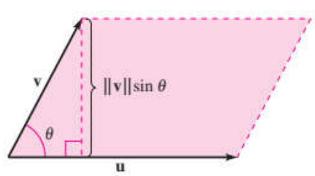
خواص جبری ضرب خارجی:

۱. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
۲. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
۳. $c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v})$
۴. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{۰}$
۵. $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$

خواص هندسی ضرب خارجی: فرض کنید $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بردار هایی ناصفر در فضا باشند، در این صورت:

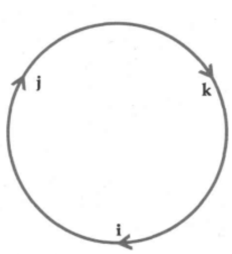
۱. $\vec{u} \times \vec{v}$ بر بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمود است.

۲. $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$



۳. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{۰}$ اگر و تنها اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مضربی از هم باشند.

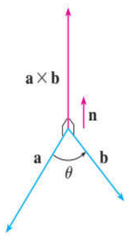
۴. $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو ضلع مجاور آن باشند.



$$\mathbf{i \times i = j \times j = k \times k = 0}$$

$\mathbf{i \times j = k}$	$\mathbf{j \times k = i}$	$\mathbf{k \times i = j}$
$\mathbf{j \times i = -k}$	$\mathbf{k \times j = -i}$	$\mathbf{i \times k = -j}$

مثال: مساحت مثلثی را بیابید که رئوس آن $P=(۱,-۱,۰)$ ، $Q=(۲,۱,-۱)$ ، و $R=(-۱,۱,۲)$ باشد.



$$\overrightarrow{PQ}=(۲-۱)\hat{i}+(۱+۱)\hat{j}+(-۱-۰)\hat{k}=\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}$$
$$\overrightarrow{PR}=(-۱-۱)\hat{i}+(۱+۱)\hat{j}+(۲-۰)\hat{k}=-۲\hat{i}+۲\hat{j}+۲\hat{k}$$
$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ ۱&۲&-۱\\ -۲&۲&۲\end{vmatrix}=۶\hat{i}+۶\hat{k}$$
$$S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶^۲+۶^۲}=۳\sqrt{۲}$$

مثال: بردار یکه ای بیابید که بر صفحه گذرا از سه نقطه $P=(۱,-۱,۰)$ ، $Q=(۲,۱,-۱)$ ، و $R=(-۱,۱,۲)$ عمود باشد.

$$\hat{n}=\frac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}=\frac{۶\hat{i}+۶\hat{j}}{۶\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j}$$

تعریف (ضرب جعبه ای): فرض کنید $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار در فضا باشند. در این صورت $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$ را ضرب عددی سه‌گانه یا ضرب جعبه ای سه بردار نامیده می‌شود. همانطور که قبلا دیدیم:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$$

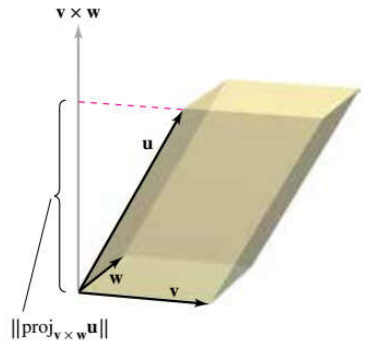
قضیه: اگر $\vec{u}=u_۱\hat{i}+u_۲\hat{j}+u_۳\hat{k}$ ، $\vec{v}=v_۱\hat{i}+v_۲\hat{j}+v_۳\hat{k}$ ، و $\vec{w}=w_۱\hat{i}+w_۲\hat{j}+w_۳\hat{k}$ در این صورت ضرب جعبه ای برابر است با:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_۱&u_۲&u_۳\\ v_۱&v_۲&v_۳\\ w_۱&w_۲&w_۳\end{vmatrix}$$

نتیجه: با توجه به خواص دترمینان:

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}.(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}.(\vec{u}\times\vec{v})$$

قضیه: حجم متوازی السطوحی که با بردار های $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ساخته می‌شود، برابر است با:



Area of base = $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$
Volume of parallelepiped = $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$

$$V=\left|\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|$$

مثال: حجم متوازی السطوحی که با بردار های

$$\vec{u}=۳\hat{i}-۵\hat{j}+\hat{k},\hat{v}=۲\hat{j}-۲\hat{k},\vec{w}=۳\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$$

ساخته می‌شود را بیابید.

$$V=\left|\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right|$$
$$\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}۳ & -۵ & ۱\\ ۰ & ۲ & -۲\\ ۳ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=۳\times۴+۵\times۶+۱\times(-۶)=۳۶$$

صفحه در فضا:

تعریف: صفحه گذرا از نقطه $P_۰=\left(x_۰,y_۰,z_۰\right)$ و بردار نرمال $\vec{n}=<a,b,c>$ مجموعه همه نقاطی مانند Q است که $\overrightarrow{PQ}$ بر $\vec{n}$ عمود است. بنابراین اگر $Q=(x,y,z)$:

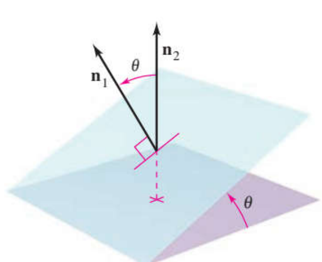
$$\overrightarrow{PQ}=<x-x_۰,y-y_۰,z-z_۰>$$
$$\overrightarrow{PQ}.\vec{n}=۰\Rightarrow<x-x_۰,y-y_۰,z-z_۰>.<a,b,c>=۰$$

لذا معادله صفحه به صورت زیر است:

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$$

معادله صفحه ای را بیابید که $P=(۲,۱,۳)$ روی آن و بردار $\vec{v}=۳\hat{i}-۴\hat{j}+۳\hat{k}$ بردار نرمال آن باشد.

$$۳(x-۲)-۴(y-۱)+۳(z-۳)=۰$$



The angle θ between two planes

زاویه بین دو صفحه با بردارهای نرمال $\vec{n}_۱$ و $\vec{n}_۲$ مقداری است مانند θ که $۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}$ و θ به صورت زیر تعیین می‌شود:

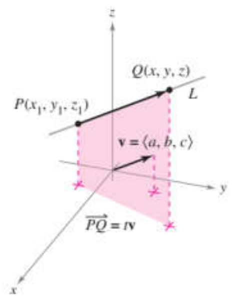
$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{n}_۱.\vec{n}_۲\right|}{\left|\vec{n}_۱\right|\left|\vec{n}_۲\right|}$$

بنابراین دو صفحه با بردارهای نرمال $\vec{n}_۱$ و $\vec{n}_۲$ متعامدند اگر $\vec{n}_۱.\vec{n}_۲=۰$ و موازی هستند اگر $\vec{n}_۱$ و $\vec{n}_۲$ مضربی از هم باشند.

مثال: زاویه بین دو صفحه $۳x - ۶y - ۲z = ۱۵$ و $۲x + y - ۲z = ۵$ را بیابید.

$$
\begin{aligned}
&\vec{n}_{۱} = ۳\hat{i} - ۶\hat{j} - ۲\hat{k} \\
&\vec{n}_{۲} = ۲\hat{i} + \hat{j} - ۲\hat{k} \\
&\cos\theta = \frac{\vec{n}_{۱}.\vec{n}_{۲}}{|\vec{n}_{۱}||\vec{n}_{۲}|} = \frac{۴}{\sqrt{۴۹}\sqrt{۳}} = \frac{۴}{۲۱} \\
&\theta = \cos^{-۱}\left(\frac{۴}{۲۱}\right) = ۱.۳۸
\end{aligned}
$$

معادله خط:



Line L and its direction vector $\mathbf{v}$

قضیه: خط گذرا از نقطه $P = (x_{۱}, y_{۱}, z_{۱})$ و موازی بردار $\vec{v} =< a, b, c >$ به کمک معادلات پارامتری زیر نمایش داده می‌شود:

$$x = x_{۱} + at, y = y_{۱} + bt, z = z_{۰} + ct$$

اگر در بردار هادی خط a ، b ، و c همگی ناصفر باشند، با حذف پارامتر t از معادلات پارامتری خط، معادلات متقارن خط به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{x - x_{۱}}{a} = \frac{y - y_{۱}}{b} = \frac{z - z_{۱}}{c}$$

مثال: معادله پارامتری و متقارن خطی که از نقطه $P = (۱, -۲, ۴)$ عبور کرده و موازی بردار $\vec{v} =< ۲, ۴, -۴ >$ است را بیابید.

معادله پارامتری به صورت:

$$x = ۱ + ۲t, y = -۲ + ۴t, z = ۴ - ۴t$$

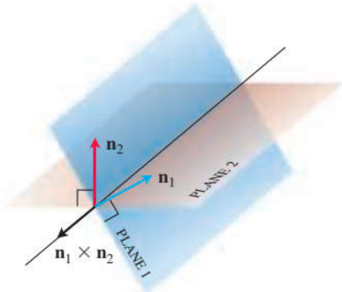
و معادله متقارن خط به فرم زیر است:

$$\frac{x - ۱}{۲} = \frac{y + ۲}{۴} = \frac{z - ۴}{-۴}$$

مثال: معادله خط گذرا از نقاط $(-۲, ۱, ۰)$ و $(۱, ۳, ۵)$ را بیابید.

$$
\begin{aligned}
&\vec{v} =< ۱ - (-۲), ۳ - ۱, ۵ - ۰ >= ۳\hat{i} + ۲\hat{j} + ۵\hat{k} \\
&x = ۱ + ۳t, y = ۳ + ۲t, z = ۵ + ۵t
\end{aligned}
$$

مثال: فصل مشترک دو صفحه $x - 2y + z = 0$ و $2x + 3y - 2z = 0$ را بیابید.



با توجه به اینکه فصل مشترک دو صفحه متقاطع بر بردار نرمال هر دو صفحه عمود است، ابتدا بردار هادی خط را به کمک رابطه زیر پیدا می‌کنیم:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

سپس یک نقطه روی فصل مشترک پیدا می‌کنیم، برای اینکار مثلا z را برابر صفر قرار می‌دهیم و سپس از معادلات صفحه x و y نقطه روی فصل مشترک را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0$$

پس نقطه $(0,0,0)$ روی فصل مشترک دو صفحه قرار دارد. لذا معادله پارامتری خط به صورت زیر است:

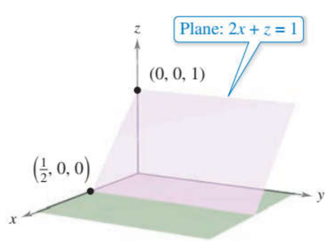
$$x = t, y = 4t, z = 7t$$

مثال: نقطه برخورد خط به معادله پارامتری

$$x = \frac{8}{3} + 2t, y = -2t, z = 1 + t$$

و صفحه $3x + 2y + 6z = 6$ را بیابید.

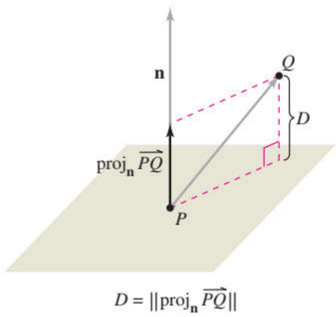
$$\begin{aligned} &3(\frac{8}{3} + 2t) + 2(-2t) + 6(1 + t) = 6 \\ &8t = -8 \Rightarrow t = -1 \\ &x = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}, y = 2, z = 1 + (-1) = 0 \\ &P = (\frac{2}{3}, 2, 0) \end{aligned}$$



Plane $2x + z = 1$ is parallel to the y-axis.

تذکر: اگر معادله یک صفحه فاقد یک متغیر باشد، در این صورت صفحه موازی محور مختصات آن متغیر است.

فاصله نقطه از صفحه:



قضیه: فاصله یک صفحه و نقطه Q خارج از صفحه به‌کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

که در اینجا $\vec{n}$ بردار نرمال صفحه و P یک نقطه واقع بر صفحه است.

مثال: فاصله نقطه $Q = (۱,۵,-۴)$ و صفحه $۳x - y + ۲z = ۶$ را بیابید.

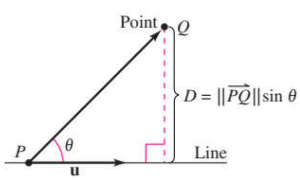
$$\begin{aligned} &\vec{n} = ۳\hat{i} - \hat{j} + ۲\hat{k} \\ &P = (۲,۰,۰) \\ &\overrightarrow{PQ} = -\hat{i} + ۵\hat{j} - ۴\hat{k} \\ &D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|-۳ - ۵ - ۸\right|}{\sqrt{۹ + ۱ + ۴}} = \frac{۱۶}{\sqrt{۱۴}} \end{aligned}$$

تذکر: اگر معادله صفحه به صورت $ax + by + cz + d = ۰$ داده شده باشد، در این صورت فاصله نقطه $Q = (x_۰, y_۰, z_۰)$ از صفحه به‌کمک فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$D = \frac{\left|ax_۰ + by_۰ + cz_۰ + d\right|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

تمرین: فاصله دو صفحه موازی $۳x - y + ۲z - ۶ = ۰$ و $۶x - ۲y + ۴z + ۴ = ۰$ را بیابید.

فاصله نقطه از خط:



قضیه: فرض کنید P یک نقطه بر خط L و $\vec{v}$ بردار هادی خط در فضا و Q نقطه‌ای دلخواه در فضا باشد. در این صورت فاصله نقطه Q تا خط L به‌کمک فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

مثال: فاصله نقطه $Q = (۳,-۱,۴)$ تا خط $x = -۲ + ۳t, y = -۲t, z = ۱ + ۴t$ را بیابید.

$$
\begin{aligned}
&P=(-2,0,1)\\
&\vec{v}=<3,-2,4>\\
&\overrightarrow{PQ}=<5,-1,3>\\
&\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\5&-1&3\\3&-2&4\end{vmatrix}=2\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}\\
&D=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

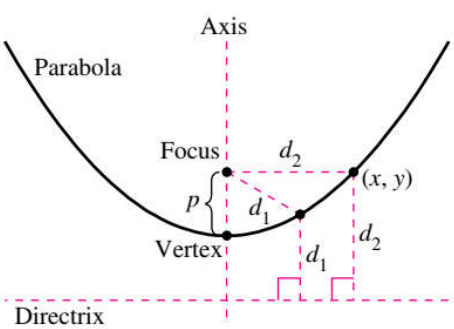
یاد آوری منحنی های درجه دوم:

دایره: مکان هندسی تمام نقاطی در صفحه که از یک نقطه ثابت، مرکز دایره، به یک فاصله اند را دایره می گوییم. این فاصله ثابت را شعاع دایره می نامیم.

معادله یک دایره به مرکز (x_0,y_0) و شعاع r برابر است با:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

سهمی: مکان هندسی همه نقاط (x,y) در صفحه که فاصله آنها تا یک نقطه خاص، کانون سهمی، و یک خط ثابت مفروض، خط هادی، به یک فاصله هستند را سهمی می نامیم. نقطه ای که بین خط هادی و کانون سهمی قرار دارد را **راس سهمی** می نامیم. همچنین خطی که از راس و کانون سهمی می گذرد را **محور سهمی** می گوییم.



قضیه: معادله استاندارد یک سهمی با راس (h,k) و کانون $(h,k+p)$ خط هادی $y=k-p$ به صورت زیر است

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

اگر $p>0$ سهمی به سمت بالا و اگر $p<0$ سهمی به سمت پایین باز می شود. به همین ترتیب معادله استاندارد یک سهمی با راس (h,k) و کانون $(h+p,k)$ خط هادی $x=h-p$ به صورت زیر است

$$(y-h)^2=4p(x-k)$$

اگر $p>0$ سهمی به سمت راست و اگر $p<0$ سهمی به سمت چپ باز می شود.

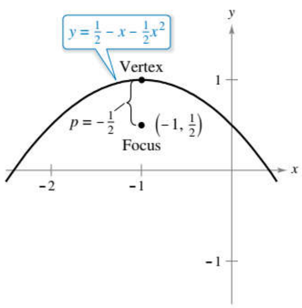
مثال: سهمی به معادله زیر را رسم کرده و کانون آن را بیابید:

$$y = \frac{۱}{۲} - x - \frac{۱}{۲}x^{۲}$$

ابتدا معادله استاندارد سهمی را پیدا می‌کنیم:

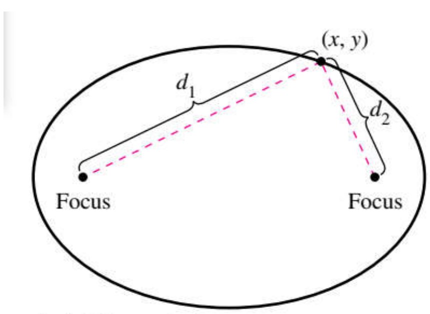
$$\begin{aligned}
۲y &= ۱ - ۲x - x^{۲} \\
۲y &= ۱ - (x^{۲} + ۲x) \\
۲y &= ۲ - (x^{۲} + ۲x + ۱) \\
(x+۱)^{۲} &= ۲ - ۲y \\
(x+۱)^{۲} &= -۲(y - ۱)
\end{aligned}$$

با مقایسه معادله اخیر و معادله $(x-h)^{۲} = ۴p(y-k)$ داریم $h = -۱, k = ۱, p = \frac{-۱}{۲}$. با توجه به اینکه مقدار p منفی است سهمی به سمت پایین باز می شود. همچنین کانون آن برابر است با $(h, k+p) = (-۱, \frac{۱}{۲})$.

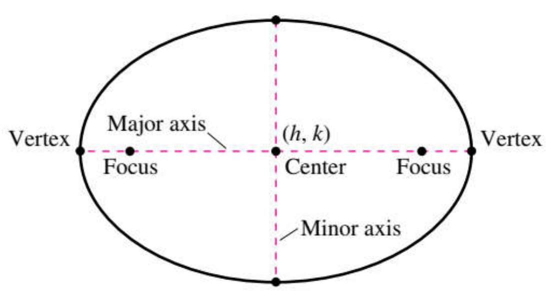


بیضی:

مکان هندسی مجموعه نقاطی مانند (x,y) که مجموع فاصله آنها تا دو نقطه ثابت، **کانون های بیضی**، مقدار ثابتی $۲a$ باشد را بیضی می نامیم. خطی که از کانون های بیضی می گذرد بیضی را در دو نقطه قطع می کند، این نقاط **رئوس بیضی** نامیده می شود. پاره خطی که رئوس بیضی را به هم وصل می کند محور اصلی بیضی نامیده می شود. نقطه ای که وسط رئوس بیضی قرار دارد **مرکز بیضی** نام دارد.



$d_1 + d_2$ is constant.



قضیه: معادله استاندارد یک بیضی با مرکز (h,k) و قطر اصلی با طول $۲a$ و قطر کوچک به طول $۲b$ که $a > b$ به صورت

$$\frac{(x-h)^{۲}}{a^{۲}} + \frac{(y-k)^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

است، که یک بیضی با محور اصلی افقی است و یا به صورت

$$\frac{(x-h)^۲}{b^۲}+\frac{(y-k)^۲}{a^۲}=۱$$

است که یک بیضی با محور اصلی قائم است. کانون های بیضی روی محور اصلی بیضی قرار با فاصله c واحد از مرکز بیضی قرار دارند که

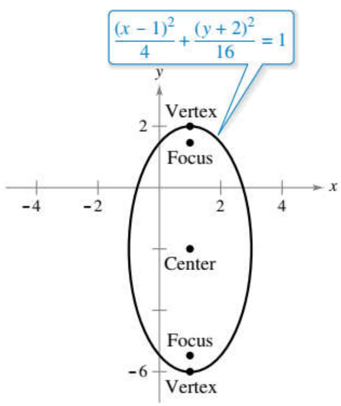
$$c^۲=a^۲-b^۲$$

مثال: مرکز، کانون و رئوس بیضی زیر را بیابید.

$$۴x^۲+y^۲-۸x+۴y-۸=۰$$

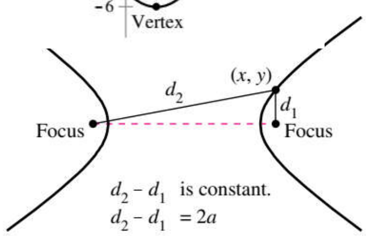
حل: ابتدا به کمک مربع کامل نمودن معادله استاندارد بیضی را پیدا می کنیم:

$$۴x^۲+y^۲-۸x+۴y-۸=۰$$
$$۴x^۲+y^۲-۸x+۴y=۸$$
$$۴(x^۲-۲x+۱)+(y^۲+۴y+۴)=۸+۴+۴$$
$$۴(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$$
$$\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۲)^۲}{۱۶}=۱$$

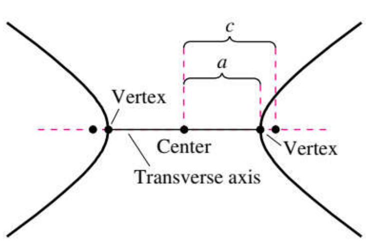


لذا یک بیضی قائم به مرکز $(۱,-۲)$ داریم. از طرفی $c=\sqrt{a^۲-b^۲}=\sqrt{۱۶-۴}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$ پس کانون های بیضی $(۱,-۲-۲\sqrt{۳})$ و $(۱,-۲+۲\sqrt{۳})$ و رئوس آن $(۱,-۶)$ و $(۱,۲)$ هستند.

هذلولی:



هذلولی مجموعه نقاطی از صفحه مانند (x,y) است که قدر مطلق تفاضل فاصله آنها از دو نقطه ثابت ،که کانون های هذلولی نامیده می شوند، عددی ثابت است. خطی که از کانون های هذلولی می گذرد، هذلولی را در دونقطه قطع می کند که رئوس **هذلولی** نامیده می شوند. پاره خطی که دو راس هذلولی را بهم وصل می کند محور عرضی هذلولی نامیده می شود.



قضیه: معادله استاندارد یک هذلولی به مرکز (h,k) اگر افقی باشد (یعنی محور اصلی آن افقی باشد) به صورت زیر است:

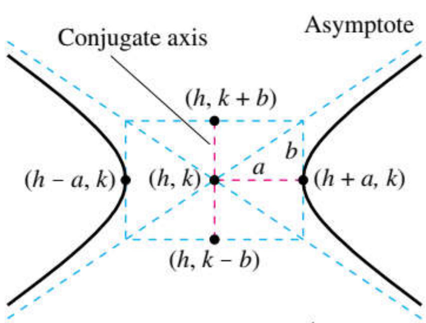
$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲}-\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱$$

و اگر عمودی باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{(y-k)^۲}{a^۲}-\frac{(x-h)^۲}{b^۲}=۱$$

رئوس هذلولی a واحد با مرکز آن فاصله دارند و کانون های آن c واحد با مرکز هذلولی فاصله دارند که $c^۲=a^۲+b^۲$.

همانطور که در شکل رو برو مشاهده می شود یک هذلولی دو مجانب دارد که همدیگر را در مرکز هذلولی قطع می کنند و در واقع قطر های مستطیلی هستند با ابعاد $۲a$ و $۲b$ به مرکز (h,k) که **مستطیل کمکی** نامیده می شود.



قضیه: مجانب های یک هذلولی افقی به صورت

$$y=k+\frac{b}{a}(x-h), y=k-\frac{b}{a}(x-h)$$

و مجانب های یک هذلولی قائم به صورت

$$y=k+\frac{a}{b}(x-h), y=k-\frac{a}{b}(x-h)$$

است.

مثال: نمودار هذلولی به معادله

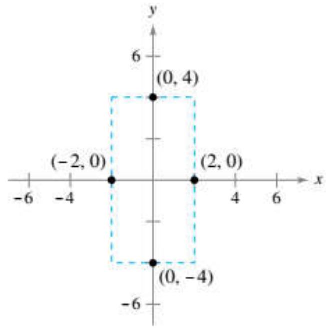
$$۴x^۲-y^۲=۱۶$$

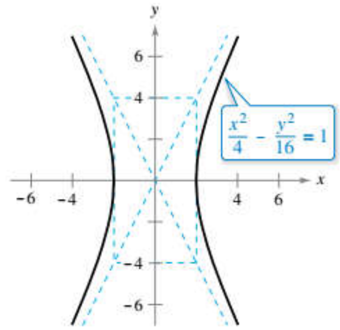
را رسم کنید.

با تقسیم طرفین معادله بر عدد ۱۶ فرم استاندارد آن را به صورت

$$\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$$

را می نویسیم که معادله یک هذلولی افقی به مرکز (۰,۰) و رئوس (۲,۰−) و (۲,۰) است. حال مستطیل کمکی را رسم کرده و به کمک آن مجانب های هذلولی را مشخص نموده و سپس آنرا رسم می نماییم.





معادلات پارامتری منحنی های درجه دوم:

معادله پارامتری یک دایره به معادله

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$$

معادله پارامتری یک بیضی به معادله

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

به فرم زیر است:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$$

معادله پارامتری یک هذلولی به معادله

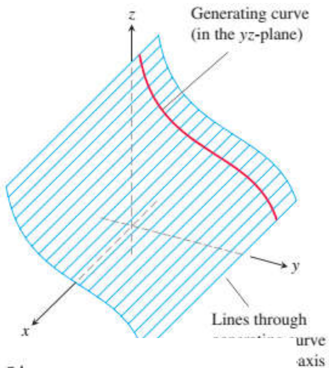
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh t \\ y = y_0 + b\sinh t \end{cases}, -\infty \le t \le \infty$$
$$\begin{cases} x = x_0 - a\cosh t \\ y = y_0 + b\sinh t \end{cases}, -\infty \le t \le \infty$$

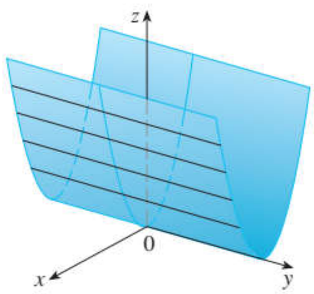
رویه ها:

تعریف (استوانه): سطحی است که توسط یک خط متحرک در امتداد یک منحنی مسطح تولید می‌شود به این صورت که این خط همیشه موازی خط ثابتی که در صفحه منحنی نیست باقی می‌ماند.
خط متحرک **مولد استوانه** و منحنی مسطح **هادی استوانه** نام دارد. هر موضع مولد یک خط جاری استوانه نامیده می‌شود.

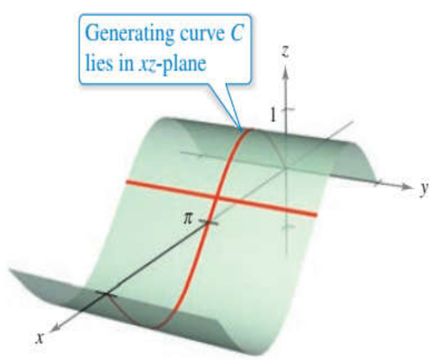


مثال: نمودار رویه $z=x^2$ را رسم کنید.

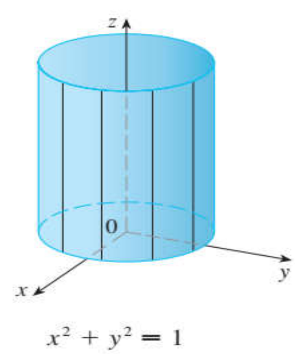
حل: با توجه به اینکه معادله بالا شامل y نیست بنابراین مقطع رویه فوق با صفحه $y=k$ منحنی $z=x^2$ می‌باشد. در واقع رویه فوق یک **استوانه سهموی** است با منحنی هادی $z=x^2$ در صفحه xz و خطوط جاری موازی با محور y ها.



قضیه: در فضای سه بعدی نمودار یک معادله دو متغیره از سه متغیر x,y,z یک استوانه است که خطوط جاریش موازی محور مربوط به متغیر مفقود در معادله بوده و هادی آن منحنی ای است در صفحه مربوط به دو متغیر معادله.



شکل 2استوانه z=sin(x)



شکل 1استوانه مستدیر

استوانه سهموی: $S: y-y_0=a(x-x_0)^2$

استوانه بیضوی: $S: \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

استوانه هذلولوی: $S: \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

رویه های درجه دو:

فرم کلی یک معادله درجه دو از سه متغیر x, y, z به صورت زیر می باشد:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exy + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

اگر بتوان معادله بالا را به صورت زیر نوشت

$$(A_1x + B_1y + C_1z - D_1)(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0 \qquad (۱/۱)$$

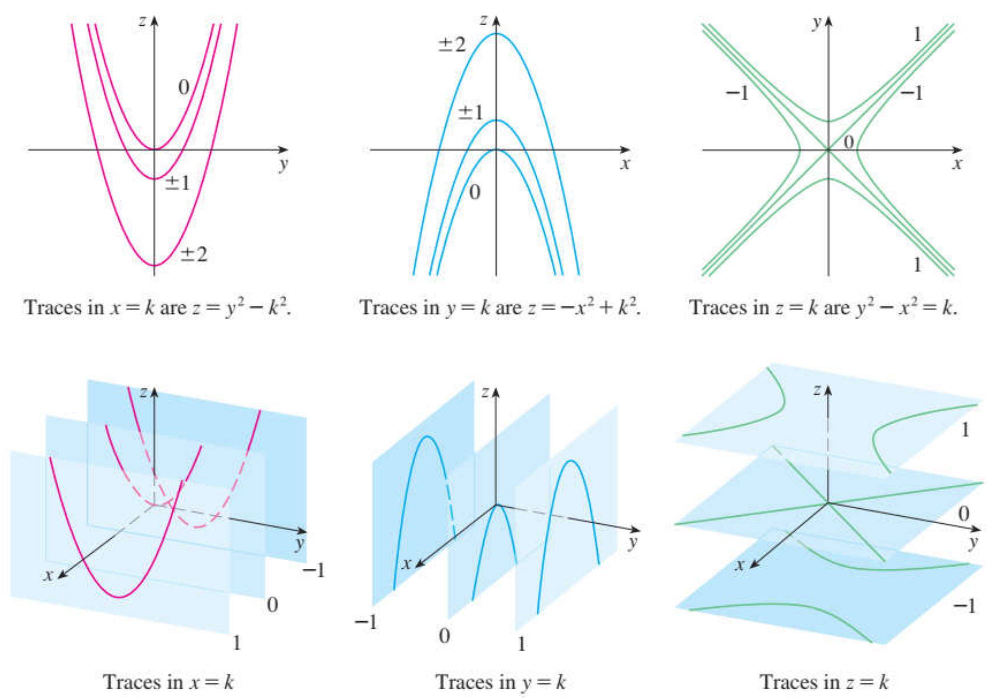
در این صورت معادله بالا نشان دهنده نمودار دو صفحه

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

می باشد که این حالت مورد توجه ما نیست. اگر نتوان معادله درجه دوم را به صورت (۱/۱) نوشت، نمودار معادله درجه دوم فوق را یک رویه درجه دوم می‌گوییم. رویه را نرمال یا استانداردگوییم هرگاه ضرایب xy, yz و zx در معادله درجه دوم برابر صفر باشد. اگر رویه غیر استاندارد باشد می توان به کمک دوران مناسب آن را نرمال سازی کرد.

رویه های درجه دوم در شش دسته کلی طبقه بندی می‌شوند: **بیضی گون**، **هذلولی گون یک پارچه**، **هذلولی گون دوپارچه**، **مخروط بیضوی**، **سهمی گون بیضوی**، و **سهمی گون هذلولوی**.

مثال: نمودار رویه $z = y^2 - x^2$ را رسم کنید.



Traces in $x = k$ are $z = y^2 - k^2$.

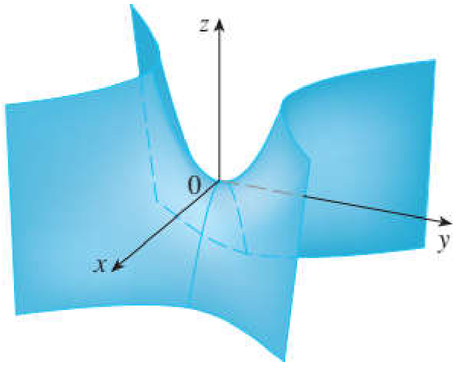
Traces in $y = k$ are $z = -x^2 + k^2$.

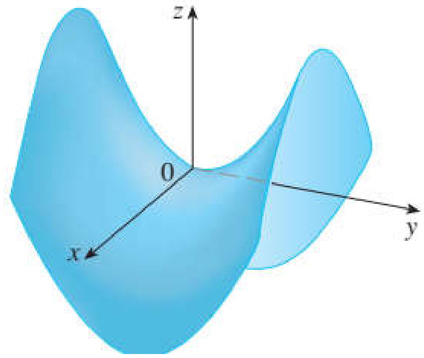
Traces in $z = k$ are $y^2 - x^2 = k$.

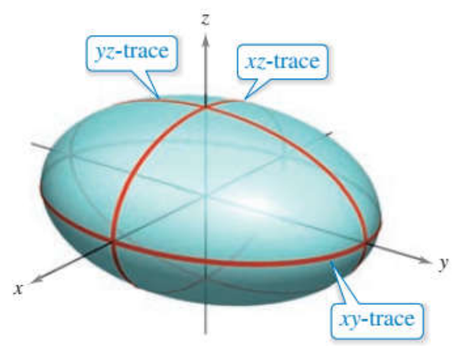
Traces in $x = k$

Traces in $y = k$

Traces in $z = k$





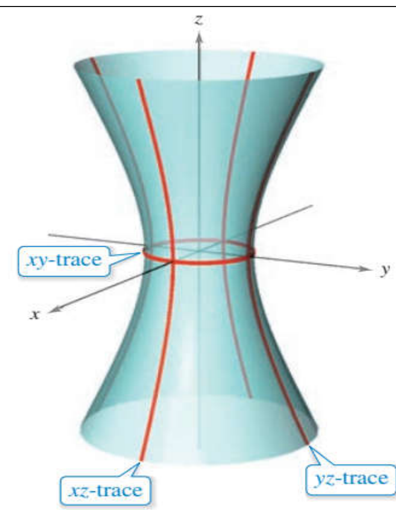


بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

صفحه	اثر
موازی صفحه xy	بیضی
موازی صفحه xz	بیضی
موازی صفحه yz	بیضی

اگر $a=b=c\neq 0$ رویه یک کره است.



هذلولی گون یک پارچه

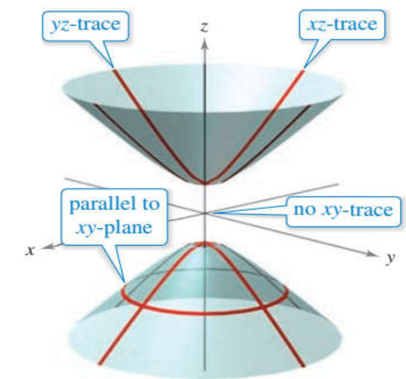
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

صفحه	اثر
موازی صفحه xy	بیضی
موازی صفحه xz	هذلولی
موازی صفحه yz	هذلولی

هذلولی‌گون دو پارچه

$$\frac{z^۲}{c^۲}-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

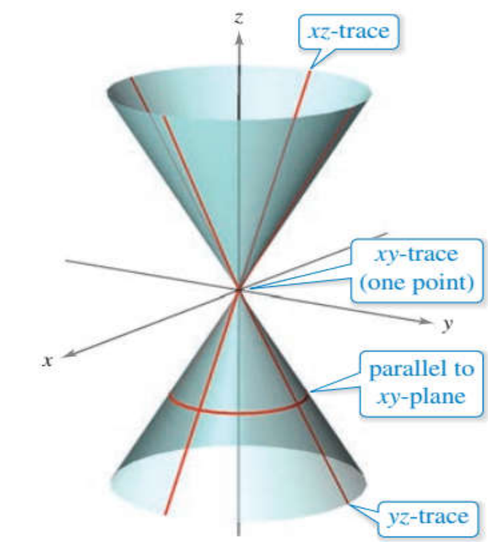
صفحه	اثر
موازی صفحه xy	بیضی
موازی صفحه xz	هذلولی
موازی صفحه yz	هذلولی



مخروط

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۰$$

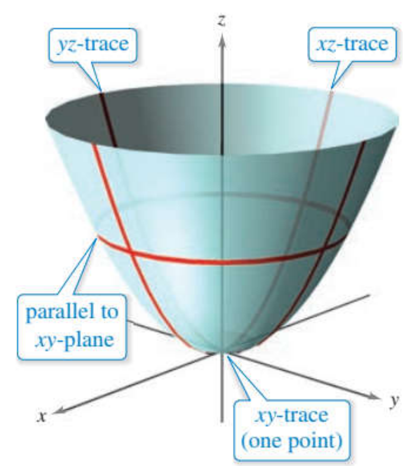
صفحه	اثر
موازی صفحه xy	بیضی
موازی صفحه xz	هذلولی
موازی صفحه yz	هذلولی



سهمی‌گون بیضوی

$$z=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}$$

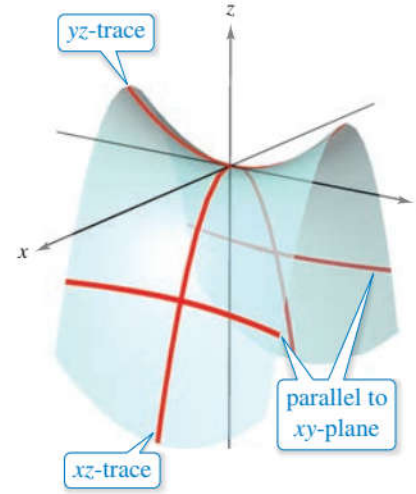
صفحه	اثر
موازی صفحه xy	بیضی
موازی صفحه xz	سهمی
موازی صفحه yz	سهمی



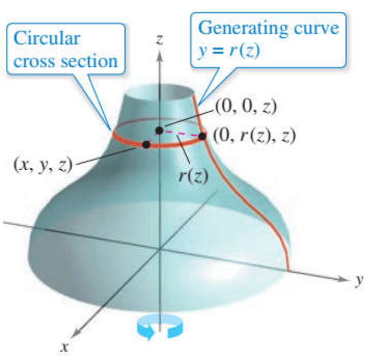
سهمی گون هذلولوی

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

اثر	صفحه
هذلولی	موازی صفحه xy
سهمی	موازی صفحه xz
سهمی	موازی صفحه yz



سطح دوار: اگر یک منحنی مسطح حول خط ثابتی در صفحه منحنی بگردد، سطح تولید شده یک سطح دوار نام دارد. خط ثابت **محور** سطح دوار و منحنی مسطح **منحنی مولد** نامیده می شود.



منحنی تابع شعاعی $y = r(z)$ را در صفحه yz نظر بگیرید. اگر این منحنی حول محور z دوران کند، همانطور که در شکل روبرو دیده می شود یک سطح دوار داریم که اثر آن روی صفحه $z = z_0$ یک دایره به شعاع $r(z_0)$ و به معادله $x^2 + y^2 = [r(z_0)]^2$ است. بنابراین معادله این رویه به صورت

$$z^2 + y^2 = [r(z)]^2$$

خواهد بود. در حالت کلی معادله رویه حاصل از دوران تابع شعاعی r حول یک محور مختصات به صورت زیر است:

۱- دوران حول محور x : $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$

۲- دوران حول محور y : $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$

۳- دوران حول محور z : $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

مثال: معادله سطح حاصل از دوران منحنی $y^2 = 4x$ در صفحه xy حول محور x ها را بیابید.

$$y^2 + z^2 = 4x$$

که یک سهمی گون دوار است.