توابع چند متغیره:

تعریف: تابع n متغیره f، ضابطه‌ای است که به هر نقطه مانند $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ مقدار حقیقی منحصر به فردی نسبت می‌دهد. D_f دامنه f و برد f تمامی مقادیری است که تابع f روی قلمرو خود می‌گیرد:

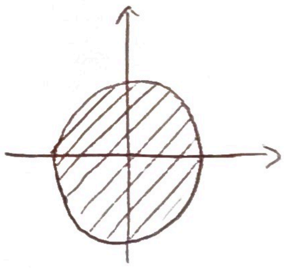
$$R_f = \{ f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D_f \}$$

به $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای مستقل و به $w = f(x_1, \dots, x_n)$ متغیر وابسته می‌گوییم.

مثال: دامنه توابع زیر را رسم کنید.

1) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25$$



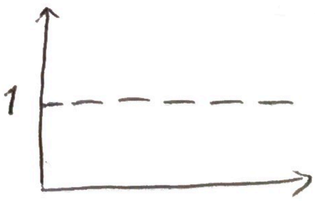
دامنه تابع رو و داخل دایره‌ای به شعاع 5 است

2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

$$x^2 - y^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq y^2 \Rightarrow y \neq \pm x$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{ (t,t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

3) $f(x,y) = \log_y x$



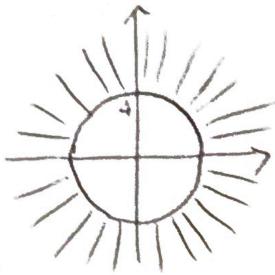
$x > 0 \,,\; y \neq 1 \,,\; y > 0$

$$D_f = \{ (x,y) \mid x > 0 \,,\; y > 0 \,,\; y \neq 1 \}$$

4) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$

$$x^2 + y^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 16$$

رو و بیرون دایره‌ای به شعاع 4



تابع چندجمله‌ای: یک تابع چندجمله‌ای از دو متغیر x و y، تابعی است مانند f بطوریکه $f(x,y)$ مجموع جملاتی به شکل cx^ny^m است، که در آن c عددی حقیقی و n و m اعداد صحیح نامنفی هستند. درجه تابع چندجمله‌ای بزرگترین مجموع توانهای x و y که در یک جمله می‌آیند تعریف می‌شود.

مثلاً

$$f(x,y)=6x^3y^2-5xy^3+7x^2y-2x^2+y+1$$

یک چندجمله‌ای از درجه 5 است.

تعریف: هرگاه f یک تابع حقیقی یک متغیره و g تابعی n متغیره باشد، آنگاه تابع مرکب $f\circ g$، تابعی n متغیره است که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(f\circ g)(x_1,\dots,x_n)=f(g(x_1,\dots,x_n))$$

قلمرو $f\circ g$ تمام $(x_1,\dots,x_n)$ هایی در قلمرو g است که $g(x_1,\dots,x_n)$ در قلمرو f باشد.

مثال: اگر $f(x)=\sin^{-1}(x)$ و $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}$، در اینصورت D_g روی و بیرون کره‌ای به شعاع 2 است. از طرفی قلمرو $\sin^{-1}(x)$ برابر $[-1,1]$ است، لذا $D_{f\circ g}$، مجموعه نقاطی از فضا است که $0\le x^2+y^2+z^2-4\le 1$، یعنی $4\le x^2+y^2+z^2\le 5$، که در واقع ناحیه بین دو کره می‌شود.

تعریف: هرگاه f یک تابع دو متغیره باشد، در اینصورت منظور از نمودار f، تمام نقاط $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ است که $(x,y)\in D_f$ و $z=f(x,y)$.

مثال: نمودار تابع $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$، نیمکره‌ای به مرکز مبداء و به شعاع 3 است.

اثر و تراز : جهت رسم یک رویه معمولاً منحنی های اثر (مقطع) رویه مورد نظر با سطوح موازی با صفحات مختصات کمک می کند. اثر رویه $z=f(x,y)$ روی صفحه $z=k$ که روی صفحه xy تصویر شده باشد را منحنی تراز گویند.

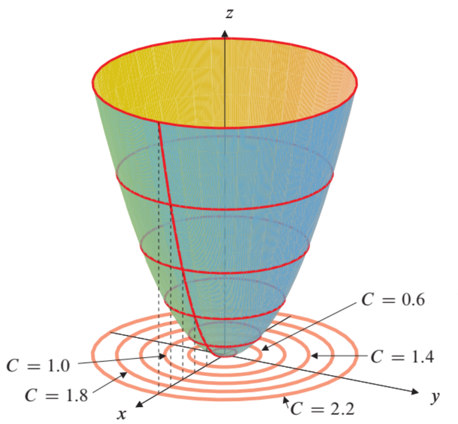
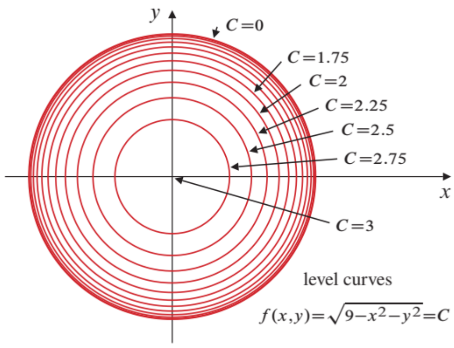
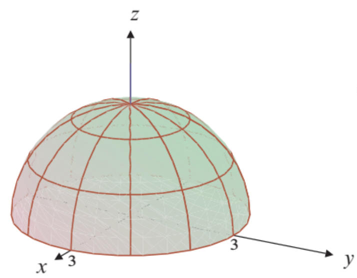
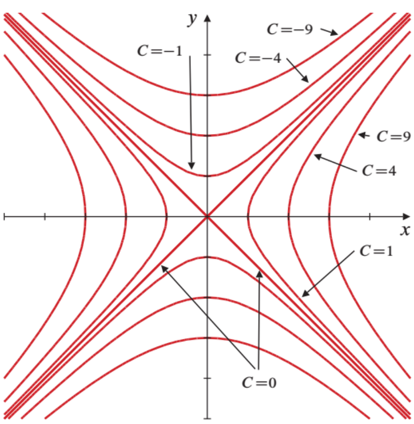
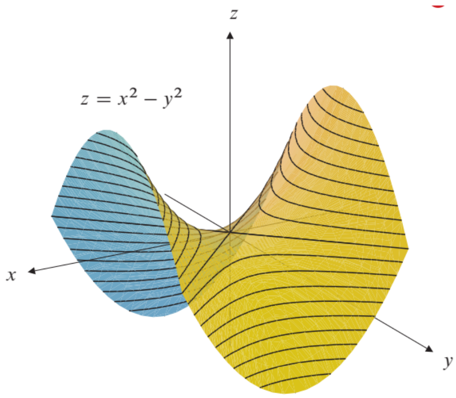


Figure 12.5 The graph of $f(x, y) = x^2 + y^2$ and some level curves of f









تعریف: اگر f یک تابع n متغیره باشد، در اینصورت نمودار تابع f مجموعه نقاطی مانند $(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ است، بطوریکه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در دامنه f باشند و $w = f(x_1, \ldots, x_n)$.

رویه‌های تراز: اگر f یک تابع سه متغیره مانند $w = f(x, y, z)$ باشد، در اینصورت نمی‌توان $f(x, y, z)$ را رسم نمود ولی می‌توان رویه‌های $f(x, y, z) = c$ را رسم کرد، که c باید در برد f باشد. این رویه‌ها را رویه‌های تراز گویند.

مثال: اگر $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ در اینصورت رویه‌های تراز به فرم $4x^2 + y^2 + z^2 = c$ است.

اگر $c = 0$، $4x^2 + y^2 + z^2 = 0$ که جواب آن فقط نقطه $(0, 0, 0)$ است

اگر $c = 4$،

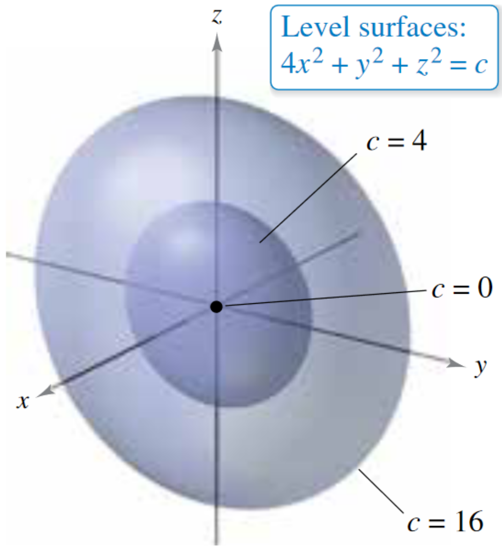
$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

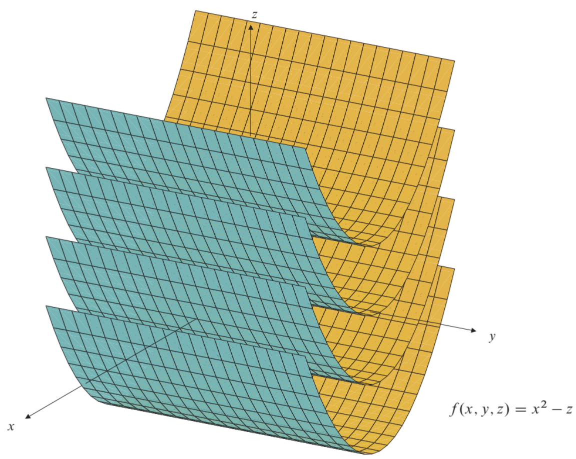
بیضی‌گون

اگر $c = 16$،

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

بیضی‌گون





مثال: اگر $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ در اینصورت رویه‌های تراز به فرم

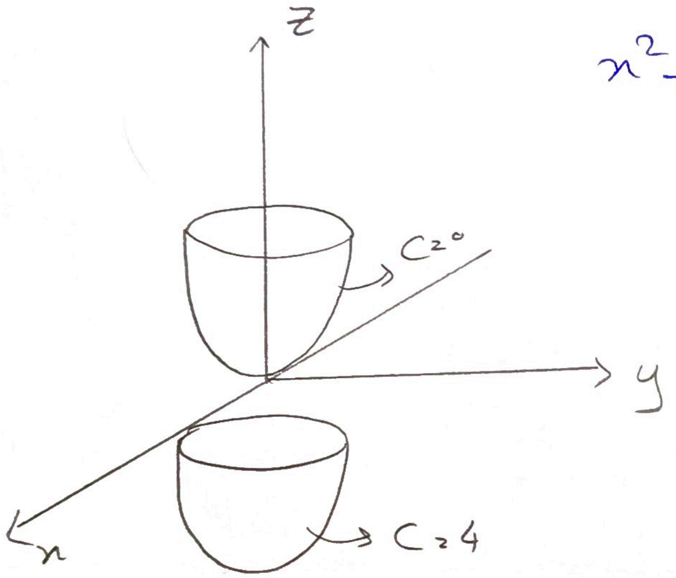
$$x^2 + y^2 - z = c$$

خواهند بود. اگر $c=0$ داریم:

$$x^2 + y^2 = z$$

اگر $c=4$:

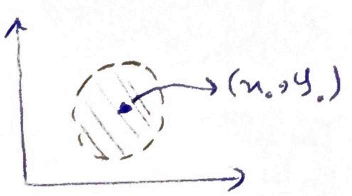
$$x^2 + y^2 = z + 4$$



حد و پیوستگی:

تعریف (δ-همسایگی)

یک δ-همسایگی نقطه (x_0,y_0) در صفحه $\mathbb{R}^2$ را دیسک بازی به مرکز (x_0,y_0) به شعاع δ تعریف می‌کنیم.



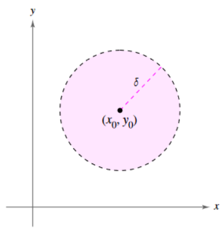
$$\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

تعریف حد: فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف (x_0,y_0) تعریف شده باشد و L یک عدد حقیقی باشد، در اینصورت می‌گوییم

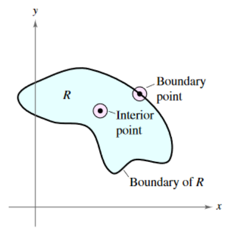
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

اگر برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ ای موجود باشد که هرگاه $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ آنگاه $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

تذکر: توجه کنید که حتماً برای اینکه تابع f در (x_0,y_0) حد داشته باشد باید یک همسایگی از (x_0,y_0) به شعاع δ موجود باشد که کاملاً درون دامنه f قرار گرفته باشد.



An open disk



The boundary and interior points of a region R

مثال: نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

باید برای هر $\varepsilon>0$، δ ای را چنان پیدا کنیم که اگر $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ در اینصورت $|f(x,y)-0|<\varepsilon$

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}-0\right| = 5\,|y|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le 5|y| \le 5\sqrt{x^2+y^2} < 5\delta$$

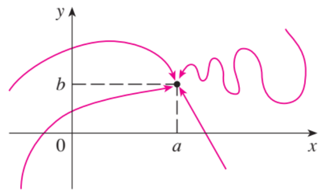
پس اگر $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ شرط برقرار است.

نکته مهم: اگر $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ موجود باشد و C یک خم گذرا از نقطه (x_0,y_0) باشد، در اینصورت

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in C}} f(x,y) = L$$

نتیجه: اگر دو خم مانند C_1 و C_2 موجود باشند که

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y)$$



آنگاه f در (x_0,y_0) حد ندارد.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=1$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=-1$$

$\Rightarrow$ بنابراین حد وجود ندارد.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(m+1)x^2} = \frac{m}{m+1}$$

لذا حد ندارد.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

روی مسیر $y=kx^2$ داریم

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{kx^4}{x^4+kx^4} = \frac{k}{1+k}$$

بنابراین حد ندارد

روی مسیر $y=mx$ داریم:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{m^2} = 0$$

لذا مسیر $y=mx$ نتوانست به ماهیت نشان دادن عدم وجود حد کمک کند.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$$

روی مسیر $y=x^{\frac{3}{2}}$ حد بالا به زیر تبدیل می‌شود:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}$$

روی مسیر $y=0$ داریم:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot 0}{x^6+0} = 0$$

لذا حد ندارد.

محاسبه حد به کمک مختصات قطبی:

تعریف: برای محاسبه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ می‌توان ابتدا به کمک تبدیلات $x=r\cos(\theta)$ و $y=r\sin(\theta)$، $g(r,\theta)=f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ را محاسبه نمود و سپس به محاسبه $\lim_{r\to 0} g(r,\theta)$ پرداخت. اگر $\lim_{r\to 0} g(r,\theta)$ به θ های مختلف بستگی داشت، حد موجود نیست و اگر داشته باشیم $g(r,\theta)=F(r)G(\theta)$ و $\lim_{r\to 0} F(r)=0$ و $G(\theta)$ کراندار باشد $\lim_{r\to 0} g(r,\theta)=0$.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} = \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{\sin(\theta)\cos(\theta)}_{\text{کراندار}} = 0$$

$\Rightarrow$ لذا تابع f در $(0,0)$ حد دارد.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$$

با توجه به اینکه تابع cos یک تابع پیوسته است، کافی است که حد زیر را بررسی کنیم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3(\theta)-r^3\sin^3(\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{(\cos(\theta)-\sin(\theta))}_{\text{کراندار}} = 0$$

در نتیجه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ موجود است و برابر 1 می باشد.

بحث بالا را می توان به حدود توابع سه متغیره تعمیم داد.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$$

روی مسیر $x=t$، $y=0$ و $z=0$ داریم:

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

روی مسیر $z=t$، $y=t$، $x=t$ داریم:

$$\lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{3t^2} = 1$$

پس تابع f در نقطه $(0,0,0)$ حد ندارد.

تذکر: اگر تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) حد داشته باشد و حد آن با $f(x_0,y_0)$ برابر باشد تابع f را یک تابع پیوسته گوییم.