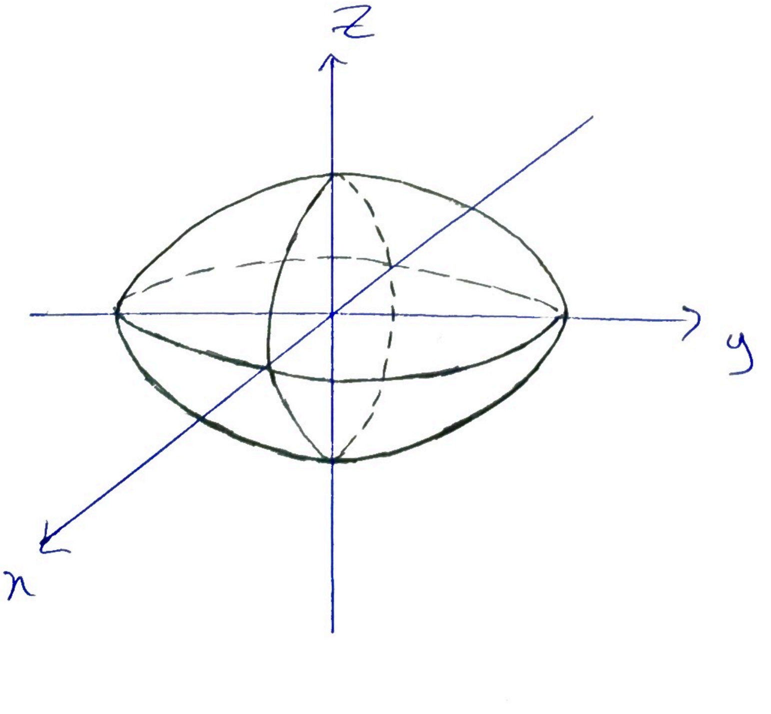
مثال: نمودار معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ یک رویه درجه دو است که بیضی‌گون نام دارد.

با توجه به معادله رویه مشخص است که باید نسبت به صفحات مختصات متقارن باشد. اگر قرار دهیم $x=y=0$ می‌بینیم که رویه محور zها را در نقطه $(0,0,\pm c)$ قطع می‌کند، به همین ترتیب با قرار دادن $y=z=0$ محل قطع محور xها $(\pm a,0,0)$ و با قرار دادن $x=z=0$ محل قطع محور yها $(0,\pm b,0)$ بدست می‌آید. با قرار دادن $z=0$، اثر رویه بر صفحه xy بصورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بدست می‌آید که یک بیضی به مرکز مبداء و با نیم قطرهای a و b است. با قرار دادن $x=0$، اثر رویه بر صفحه yz بصورت $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ است که یک بیضی به مرکز مبداء و با نیم قطرهای b و c است. به همین ترتیب با قرار دادن $y=0$، اثر رویه بر صفحه xz، بیضی‌ای به مرکز مبداء و با نیم قطرهای a و c است. اگر $z=k$ قرار دهیم اثر رویه بر صفحه $z=k$ بصورت

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

است. اگر $|k|<c$ اثر رویه بر صفحه یک بیضی، اگر $|k|=c$ یک نقطه $(0,0,\pm k)$ است اما اگر $|k|>c$، اثر رویه مجموعه تهی است.



مثال: نمودار معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ یک رویه درجه دوم است که به آن هذلولی‌گون یک پارچه می‌گویند. این رویه نیز نسبت به مبداء متقارن است که به آن مرکز هذلولی‌گون می‌گوییم. با قرار دادن $y=z=0$، تقاطع رویه با محور xها به صورت $(\pm a, 0, 0)$ بدست می‌آید و با قرار دادن $x=z=0$ تقاطع رویه با محور yها به صورت $(0, \pm b, 0)$ بدست می‌آید. به سادگی می‌توان دید که این رویه محور zها را قطع نمی‌کند ($-\frac{z^2}{c^2}=1$).

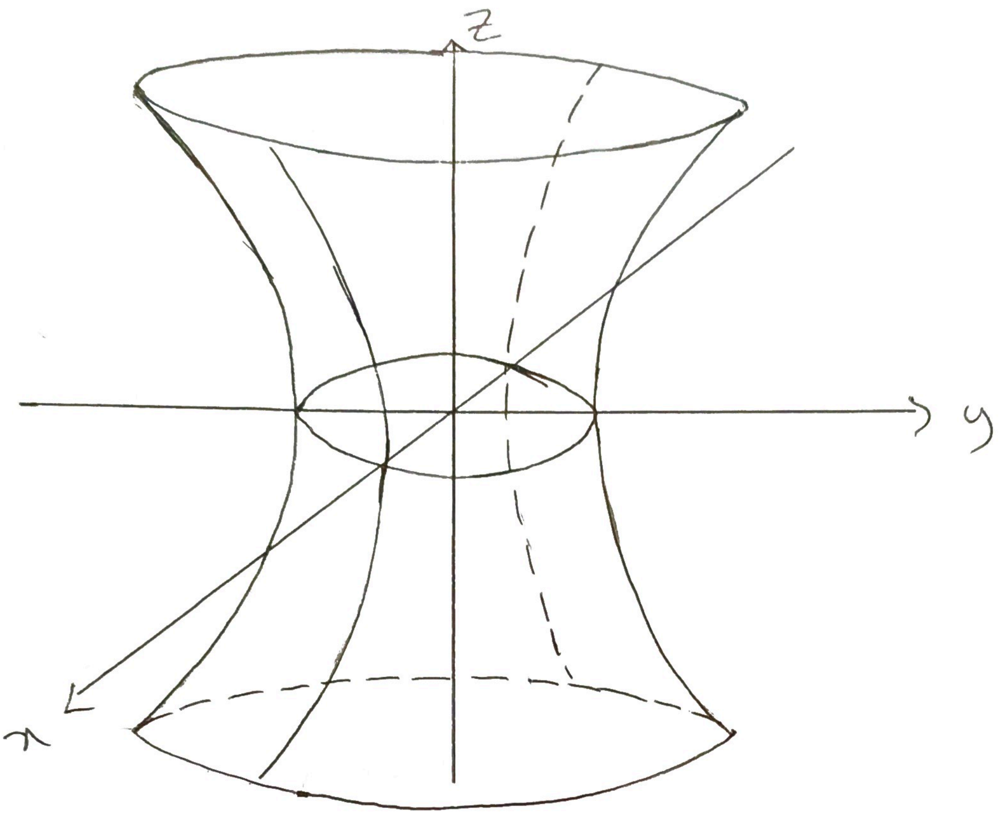
برخلاف بیضی‌گون که به سادگی در درون یک جعبه با ابعاد $2a$، $2b$، $2c$ قرار می‌گرفت هذلولی‌گون یک پارچه یک رویه بی‌کران است. این رویه در هر دو جهت مثبت و منفی محور zها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. لذا محور zها را محور هذلولی‌گون می‌نامیم.

اثر این هذلولی‌گون روی صفحه xy ($z=0$) به صورت

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

است که یک بیضی با نیم قطرهای a و b است. در حالت کلی اثر این رویه در صفحه $z=k$ بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ است. از طرف دیگر اثر این رویه در صفحه xz ($y=0$) به صورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ است که معادله یک هذلولی است که شاخه‌هایش در جهت محور xها باز می‌شوند. به همین ترتیب اثر این رویه در صفحه yz ($x=0$) نیز یک هذلولی به معادله $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ است که شاخه‌های آن در جهت محور yها باز می‌شوند. اگر $a=b$ معادله رویه به $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ تبدیل

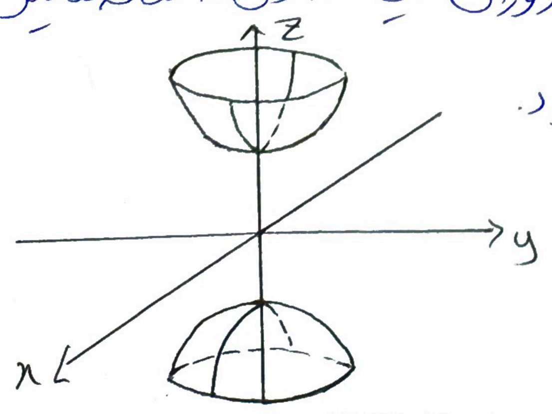
می‌شود که یک رویه دوار است که از دوران یک هذلولی حول محور z ها ایجاد می‌شود.



ادامه دارد ←

مثال: نمودار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ یا به طور معادل $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ یک رویه درجه دو است که هذلولی‌گون دوپارچه نام دارد. با قرار دادن $x=y=0$، محل برخورد این رویه با محور z ها به صورت $(0, 0, \pm c)$ بدست می‌آید. اگر z را برابر با صفر قرار دهیم اثر این رویه در صفحه xy بصورت $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ در می‌آید که مجموعه تهی است و این رویه با محور x ها و y ها برخورد نمی‌کند، مانند هذلولی‌گون یک پارچه این رویه نیز بی‌کران است و در راستای مثبت و منفی محور z ها به سمت بی‌نهایت گسترده می‌شود.

اثر این رویه بر صفحه $z=k$ بصورت
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{k^2}{c^2}$$
است. اگر $k=\pm c$ اثر رویه یک نقطه است. اگر $|k|>c$ اثر رویه بر صفحه $z=k$ یک بیضی است و اگر $|k|<c$ مجموعه تهی می‌باشد. از طرف دیگر اثر این رویه بر صفحه xz $(y=0)$ بصورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ یا $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ که معادله یک هذلولی است که شاخه‌هایش در جهت محور z ها باز می‌شود. به همین ترتیب اثر این رویه بر صفحه yz $(x=0)$ بصورت $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ است که یک هذلولی است که شاخه‌هایش در جهت محور z ها باز می‌شود. اگر $a=b$ یک رویه دوار داریم که از دوران یک هذلولی که شاخه‌هایش در جهت محور z ها باز شده‌اند حول محور z ایجاد می‌شود.



مثال: نمودار معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ مخروط بیضوی نام دارد. اگر قرار دهیم $z=k$ مقطع رویه با صفحه $z=k$ بصورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$ خواهد بود. اگر $k=0$ داریم، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ که به ما مبداء را خواهد داد و اگر $k\neq 0$ مقطع رویه یک بیضی است. در حالت خاص اگر $k=\pm c$، مقطع رویه بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ خواهد بود.

حال قرار می‌دهیم $y=k$، و داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

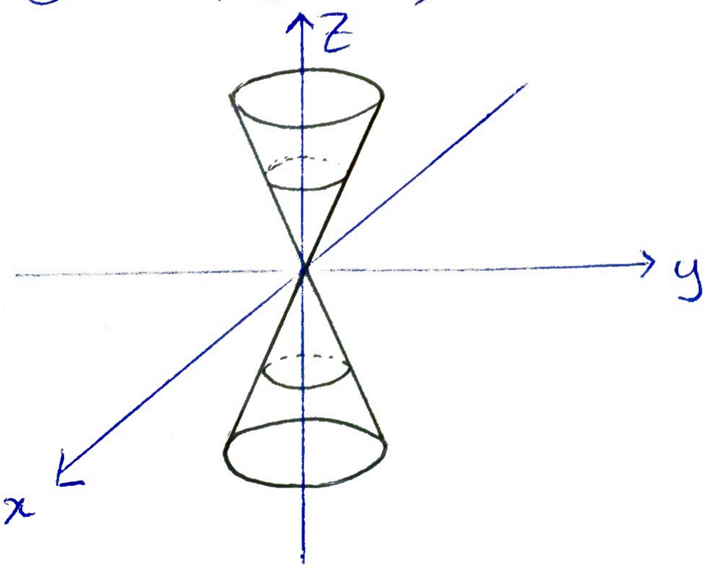
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{b^2} \Rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}$$

اگر $k=0$ باشد، $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$ که معادله دو خط متقاطع در مبدا است.

و اگر $k\neq 0$ باشد، یک هذلولی خواهیم داشت که شاخه های آن در جهت محور z باز می‌شوند. برای یافتن مقطع رویه با صفحات موازی صفحه yz، $x=k$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}$$

که مشابه قبل اگر $k=0$، دو خط متقاطع و اگر $k\neq 0$ یک هذلولی با شاخه های در جهت محور zها است.



اگر $a=b$ باشد، معادله مخروط به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ درخواهد آمد که معادله یک مخروط مستدیر است که از دوران یک خط گذرا از مبداء حول محور zها بدست می آید. (سطح دوار)

مثال: نمودار معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ یک رویه درجه دو است که به آن سهمی گون بیضوی می گوییم. با قرار دادن $z=k$ داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k \xRightarrow{k\neq 0} \frac{x^2}{ka^2}+\frac{y^2}{kb^2}=1$$

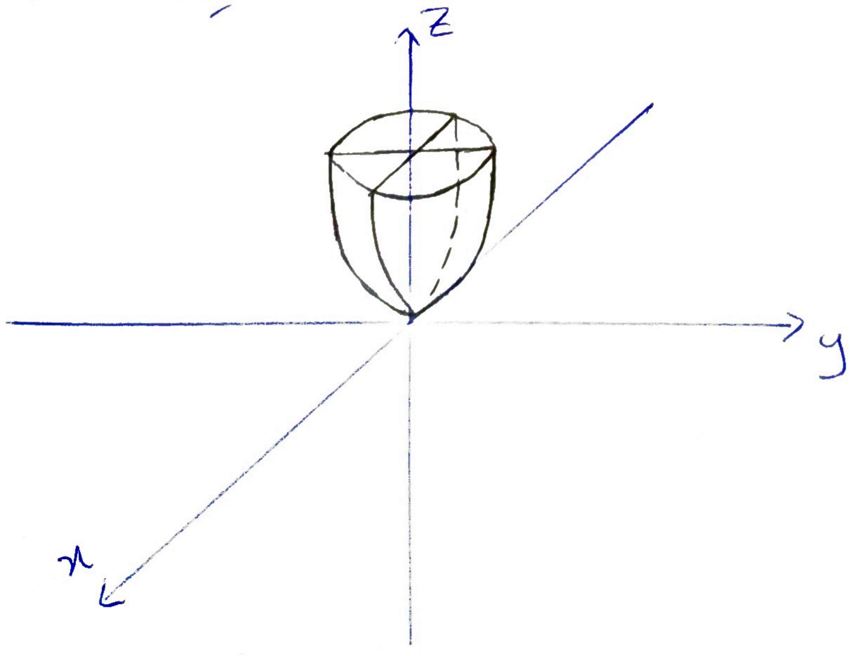
که یک بیضی است اگر $k>0$ و مجموعه تهی است اگر $k<0$.

و اگر $k=0$، داریم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ که مبداء مختصات را نشان می دهد.

اثر این رویه در صفحه xz ($y=0$) برابر است با:

$$\frac{x^2}{a^2}=z$$

که یک سهمی است که رو به محور z به سمت بالا باز می شود. همچنین اثر آن روی صفحه yz نیز یک سهمی به معادله $\frac{y^2}{a^2}=z$ است. اگر $a=b$ باشد، این سهمی گون به یک رویه دوار که حاصل دوران یک سهمی به رأس مبداء حول محور z تبدیل می شود.

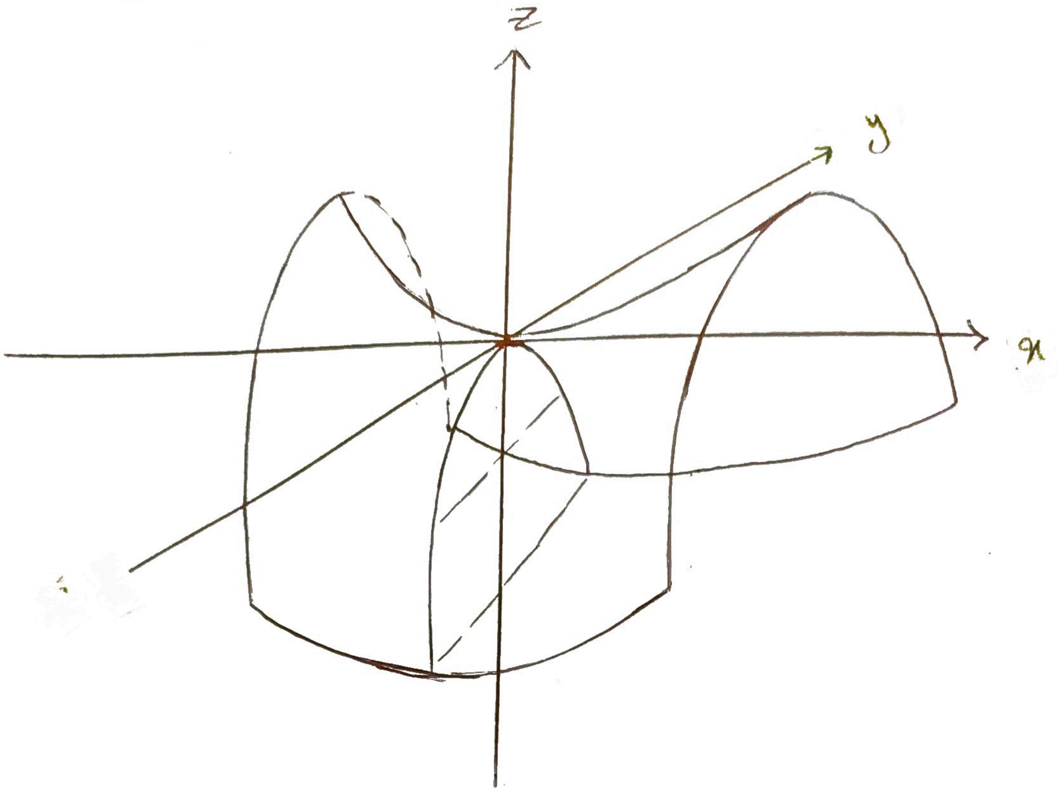


مثال ۳: نمودار معادله $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ رویه درجه دومی است که سهمی گون هذلولوی نام دارد. این رویه نسبت به بقیه رویه‌های درجه دوم ساختار پیچیده‌تری دارد. اثر این رویه در صفحه xz ($y=0$) بصورت $z = \frac{x^2}{a^2}$ است که معادله یک سهمی است که به سمت بالا در جهت مثبت محور zها باز می‌شود. همچنین اثر این رویه در صفحه yz ($x=0$) به صورت سهمی $z = \frac{-y^2}{b^2}$ است که یک سهمی است که به سمت پایین در جهت منفی محور zها باز می‌شود. اثر این سهمی گون روی صفحه $x = \pm k$ سهمی‌های به معادله $z = \frac{-y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}$ هستند کاملاً مشابه سهمی $z = -\frac{y^2}{b^2}$، ولی رأس آنها به اندازه $\frac{k^2}{a^2}$ از مبدا، بالاتر است.

به همین ترتیب اثر این سهمی گون روی صفحات $y = k$ بصورت $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}$ سهمی ای که در جهت مثبت محور zها باز می‌شود و رأس آن $(0, k, -\frac{k^2}{b^2})$ است. اثر این سهمی گون روی صفحه xy، ($z=0$) بصورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ است که در واقع دو خط متقاطع در مبدا هستند. همچنین اثر این رویه در صفحه $z = k$ وقتی که $k > 0$ است بصورت هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \Rightarrow \frac{x^2}{ka^2} - \frac{y^2}{kb^2} = 1$$

هذلولی ای که شاخه‌هایش در جهت محور x باز می‌شوند و اگر $k < 0$، بصورت هذلولی ای است که شاخه‌هایش در جهت محور y باز می‌شوند.


z
y
x