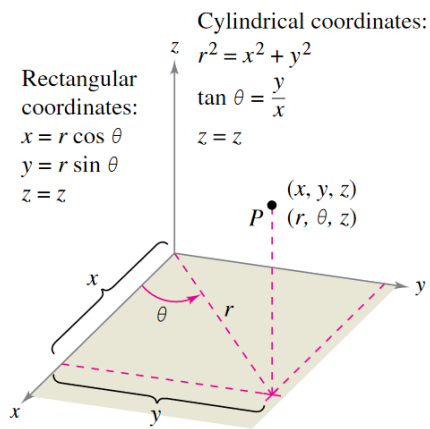


مختصات استوانه‌ای: مختصات استوانه‌ای تقییبی از مختصات قطبی به فضای سه بعدی

است. هر نقطه مانند $P(x, y, z)$ را می‌توان در مختصات استوانه‌ای با سه تایی (r, θ, z) نمایش داد که در آن (r, θ) مختصات قطبی نقطه (x, y) در صفحه قطبی هستند.



$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z$$

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z$$

مثال: مختصات استوانه‌ای نقاط زیر را بیابید.

1) $(1, 1, 1)$

$$r = \sqrt{2}, \quad \tan(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \quad z = 1 \quad P = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$$

2) $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$

$$r = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6, \quad \tan(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}, \quad z = 6$$

$$P = (6, \frac{7\pi}{6}, 6)$$

مثال: مختصات دکارتی نقاط زیر را بیابید.

1) $(4, \frac{\pi}{2}, 5)$

$$x = r \cos(\theta) = 4 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y = r \sin(\theta) = 4 \sin(\frac{\pi}{2}) = 4$$

$$z = 5$$

$$P = (0, 4, 5)$$

2) $(7, \frac{\pi}{3}, -4)$

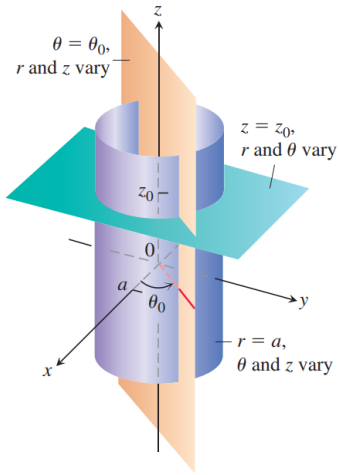
$$x = r \cos(\theta) = 7 \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{7}{2}, \quad y = r \sin(\theta) = 7 \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$z = -4$$

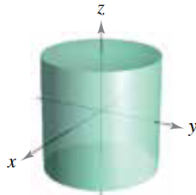
$$P = (\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}, -4)$$

سطوح مختصات استوانه‌ای: مکان هندسی نقاطی که در یکی از معادلات $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ و یا $z = z_0$ صدق کنند را سطوح مختصات استوانه‌ای گویند.

$r = r_0$: یک استوانه مستقیم، $\theta = \theta_0$: یک صفحه و $z = z_0$: یک صفحه را توصیف می‌کند.

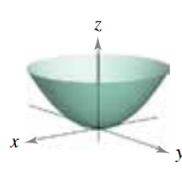


$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ r = 3 \end{cases}$$



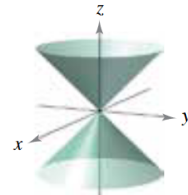
Cylinder

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ r = 2\sqrt{z} \end{cases}$$



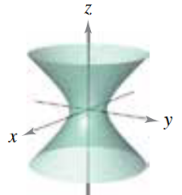
Paraboloid

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ r = z \end{cases}$$



Cone

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ r^2 = z^2 + 1 \end{cases}$$



Hyperboloid

مثال: معادله $r = 1 + \cos(\theta)$ یک استوانه را در \mathbb{R}^3 تقریب می‌کند که مقطع آن با صفحات $z = k$ یک دلواریت است.

مثال: رویه‌های زیر را در مختصات استوانه‌ای توصیف کنید.

1) $z = r^2$

$z = x^2 + y^2$ سطحی کون بیضی

2) $z = r \cos \theta$

$z = x$ صفحه

3) $r = 2 \cos \theta$

$r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

استوانه متصدیر به شعاع 1

سوال: منحنی داده شده با معادلات زیر در مختصات استوانه‌ای را توصیف کنید.

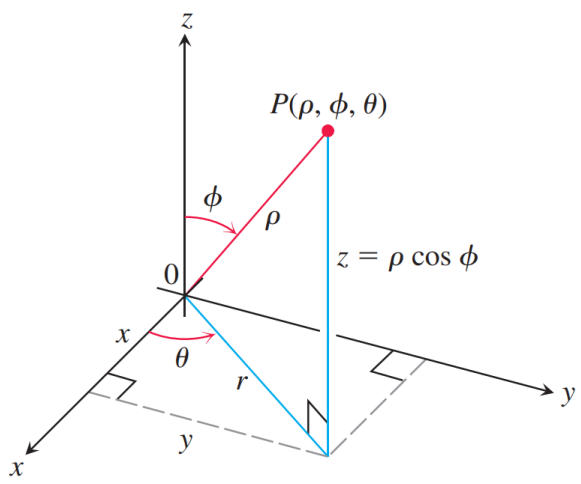
$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ r^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ صفحه z و راجعاً به داده و $r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ یک کره به شعاع 2 استخفا
 می کند. لذا این دو معادله مخفی یک دایره به شعاع (دو روی صفحه z به مرکز مبدأ می باشد.

مختصات کروی:

در مختصات کروی هر نقطه مانند P را با سه تایی (ρ, ϕ, θ) نمایش می دهیم که در آن
 $\rho = |OP|$ زاویه ای که سمت مثبت محور z ها با پاره خط OP می سازد و θ زاویه ای
 که سمت مثبت محور x ها با تصویر پاره خط OP روی صفحه xy می سازد می باشد. مناسب
 است که فرض کنیم $0 < \phi < \pi$ و $0 < \theta < 2\pi$. این محدودیت باعث می شود که تبدیل بین
 مختصات کروی و دکارتی تا پای ممکن (تغییر از محور z ها) یک به یک شود.

تبدیل مختصات کروی به دکارتی:



$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$z = \rho \cos(\phi)$$

تبدیل مختصات دکارتی به کروی:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

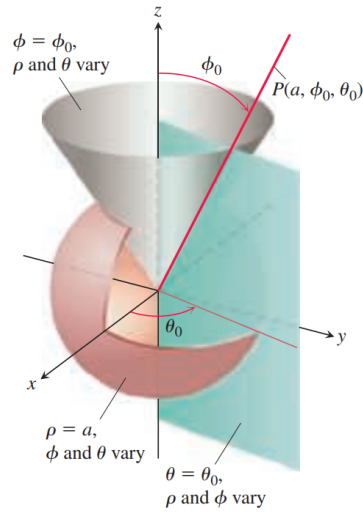
تبدیل مختصات کروی و استوانه ای:

$$r = \rho \sin(\phi)$$

$$\rho = \sqrt{z^2 + r^2}$$

سطوح مختصات کروی: سطوح مختصات کروی به صورت زیر تعریف می گردند:

نیم صفحه $\theta = \theta_0$, مخروط $\phi = \phi_0$, کره $\rho = \rho_0$



مسئله: مختصات دکارتی $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ را به بیست آورید.

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$z = \rho \cos(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$P = (0, \sqrt{3}, 1)$$

مسئله: مختصات کروی $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ را به بیست آورید.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$P = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

$$\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \rho^2 \cos^2(\phi) - 2\rho \cos(\phi) + 1 = 1$$

$$\rho^2 - 2\rho \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \rho = 2 \cos(\phi)$$

مسئله: معادله کره زیر را در مختصات کروی بیابید: